טופולוגיה אלגברית 1 - תרגיל בית 4

שאלה 1

הראה שאם $f:X\longrightarrow Y$ היא נול-הומוטופית, ואם $a\in X$, אזי $f_*:\pi_1(X,a)\longrightarrow\pi_1(Y,f(a))$ הוא ההומומורפיזם הטריוויאלי.

הוכחה:

f נול-הומוטופית, כלומר היא הומוטופית להעתקה קבועה K_b עבור $b\in Y$ כלשהו. נניח כי $H:X\times I\longrightarrow Y$ היא הומוטופיה מ-f ל-K_b, ונסמן $\gamma(t):=H(a,t)$.

לפי משפט מההרצאה, $f_*=F_\gamma^{-1}\circ K_{b_*}$ (כי ההומוטופיה מ-f ל-K_b).

תהי $[\varphi]\in\pi_1(X,a)$. אזי

$$f_*([\varphi])=[\gamma]\,K_{b_*}([\varphi])\,[\bar\gamma]=[\gamma]\,[K_b\circ\varphi]\,[\bar\gamma]=[\gamma]\,[K_b]\,[\bar\gamma]=[\gamma]\,[\bar\gamma]=[K_{f(a)}]$$

ולכן f_* הוא ההומומורפיזם הטריוויאלי.

שאלה 2

יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים, ויהיו $a,b\in X$. הראה שמתקיים

$$\pi_1(X\times Y,(a,b))\cong \pi_1(X,a)\times\pi_1(Y,b)$$

ביתר פירוט: יהיו $p_1:X\times Y\longrightarrow X$ ו- $p_2:X\times Y\longrightarrow Y$ ההטלות. הראה שההעתקה $\pi_1(X\times Y,(a,b))\longrightarrow\pi_1(X,a)\times\pi_1(Y,b)$ הנתונה ע"י $g\longmapsto(p_{1*}(g),p_{2*}(g))$ היא איזומורפיזם.

הוכחה:

נסמן את ההעתקה הנ"ל f. נוכיח כי f איזומורפיזם:

א. f הומומורפיזם: יהיו $[\varphi],[\psi]\in\pi_1(X\times Y,(a,b))$. אז:

$$f([\varphi][\psi])=(p_{1*}([\varphi][\psi]),p_{2*}([\varphi][\psi]))\underset{\text{הומומורפיזמים } p_{1*} \text{ ו- } p_{2*}}{=}(p_{1*}([\varphi])p_{1*}([\psi]),p_{2*}([\varphi])p_{2*}([\psi]))=$$

$$=(p_{1*}([\varphi]),p_{2*}([\varphi]))(p_{1*}([\psi]),p_{2*}([\psi]))=f([\varphi])f([\psi])$$

ב. f חד-חד ערכית: נניח כי $[\varphi],[\psi]\in\pi_1(X\times Y,(a,b))$ מקיימים $f([\varphi])=f([\psi])$. לפי הגדרה, מתקיים

$$(p_{1*}([\varphi]),p_{2*}([\varphi]))=(p_{1*}([\psi]),p_{2*}([\psi]))$$
$$\Downarrow$$
$$([p_1\circ\varphi],[p_2\circ\varphi])=([p_1\circ\psi],[p_2\circ\psi])$$

מכאן $p_1\circ\varphi\simeq_{\partial I}p_1\circ\psi$ וכן $p_2\circ\varphi\simeq_{\partial I}p_2\circ\psi$.

נסמן $K:I\times I\longrightarrow X$ הומוטופיה מ- $p_1\circ\varphi$ ל- $p_1\circ\psi$ יחסית ל- ∂I,

ונסמן $S:I\times I\longrightarrow Y$ הומוטופיה מ- $p_2\circ\varphi$ ל- $p_2\circ\psi$ יחסית ל- ∂I.

נגדיר $T:I\times I\longrightarrow X\times Y$ ע"י $T(s,t):=(K(s,t),S(s,t))$.

(1) T רציפה, כי היא רציפה בכל רכיב.

(2) לכל $s\in I$,

$$T(s,0)=(K(s,0),S(s,0))=((p_1\circ\varphi)(s),(p_2\circ\varphi)(s))=\varphi(s)$$
$$T(s,1)=(K(s,1),S(s,1))=((p_1\circ\psi)(s),(p_2\circ\psi)(s))=\psi(s)$$

(3) לכל $s\in\partial I$ ולכל $t\in I$,

$$T(s,t)=(K(s,t),S(s,t))\underset{\text{K ו-S הומוטופיות יחסית ל-}\partial I}{=}(K(s,0),S(s,0))=T(s,0)$$

בסך הכל, T הומוטופיה מ- φ ל- ψ, לכן $\varphi\simeq_{\partial I}\psi$, כלומר $[\varphi]=[\psi]$.

ג. f על: ניקח $([\varphi],[\psi])\in\pi_1(X,a)\times\pi_1(Y,b)$. נגדיר $\chi:[0,1]\longrightarrow X\times Y$ ע"י $\chi(t):=(\varphi(t),\psi(t))$. χ רציפה, כי היא רציפה בכל רכיב,

$\chi(0)=(\varphi(0),\psi(0))=(a,b)$, $\chi(1)=(\varphi(1),\psi(1))=(a,b)$ ו- $f([\chi])=([\varphi],[\psi])$, כדרוש.

בסך הכל, f איזומורפיזם.

שאלה 3

יהי X קשיר מסילתית. הראה שהתנאים הבאים על X שקולים:

א. X פשוט קשר.

ב. לכל שתי נקודות $a,b\in X$ מתקיים שכל שתי מסילות מ-a ל-b הומוטופיות ביחס ל-∂I.

ג. קיימות שתי נקודות $a,b\in X$ שעבורן כל שתי מסילות מ-a ל-b הומוטופיות ביחס ל-∂I.

הוכחה:

$\boxed{א \Rightarrow ב}$ תהיינה $a,b\in X$, ותהיינה δ,γ שתי מסילות מ-a ל-b.

X פשוט קשר, ולכן $\bar\delta*\gamma$ נול-הומוטופית ביחס ל-∂I.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\bar\delta*\gamma"] \arrow[d, "p"'] & X \\ S^1 \arrow[ur, "\widehat{\bar\delta*\gamma}"'] & \end{tikzcd}$$

הסבר: S^1 מרחב מנה של I לפי יחס השקילות המזהה את 0 ואת 1. $\bar\delta*\gamma$ מכבדת את יחס השקילות הזה, ולכן ניתן להגדיר $\widehat{\bar\delta*\gamma}: S^1\longrightarrow X$. היא נול-הומוטופית, ולכן $\bar\delta*\gamma$ נול-הומוטופית ביחס ל-∂I.

אם כן, קיים $c\in X$ שעבורו $K_c\sim\bar\delta*\gamma$. אם כן,

$$[\gamma*\bar\delta]=[\gamma][\bar\delta]=[K_c] \Rightarrow [\gamma]=[\delta]$$

$\boxed{ב \Rightarrow ג}$ טריוויאלי.

$\boxed{ג \Rightarrow א}$ תהיינה $a,b\in X$ שתי נקודות המקיימות את התנאי בסעיף ג, ותהי $f:S^1\longrightarrow X$. S^1 מרחב מנה של I, ולכן ניתן להגדיר $\gamma:=f\circ p$ רציפה, המכבדת את יחס השקילות, כלומר $\gamma(0)=\gamma(1)=c$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\gamma:=f\circ p"] \arrow[d, "p"'] & X \\ S^1 \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

X קשיר מסילתית, ולכן קיימת מסילה δ_{ac} מ-a ל-c ומסילה δ_{cb} מ-c ל-b. נשים לב ש-$\delta_{ac}*\delta_{cb}$ וגם $\delta_{ac}*\gamma*\delta_{cb}$ מסילות מ-a ל-b.

לכן, $\delta_{ac}*\delta_{cb}\simeq_{\partial I}\delta_{ac}*\gamma*\delta_{cb}$, כלומר $[\delta_{ac}*\delta_{cb}]=[\delta_{ac}*\gamma*\delta_{cb}]$

$$\Downarrow$$

$$[\delta_{ac}][\delta_{cb}]=[\delta_{ac}][\gamma][\delta_{cb}] \Rightarrow [\gamma]=[K_c] \Rightarrow \gamma\simeq_{\partial I}K_c$$

ולכן γ נול-הומוטופית ביחס ל-∂I, ומכאן, מהסבר דומה להסבר בחלק הראשון, f נול-הומוטופית.

שאלה 4

יהי X קשיר מסילתית.

הראה ש-X פשוט קשר אם ורק אם $\pi_1(X,a)=\{1\}$, כלומר $\pi_1(X,a)$ היא החבורה הטריוויאלית.

הוכחה:

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-X פשוט קשר, ותהי $[\varphi]\in\pi_1(X,a)$.

φ ו-K_a הן מסילות מ-a לעצמו, ולכן, לפי 3 סעיף ב',

$$\varphi\sim K_a \Rightarrow [\varphi]=[K_a]$$

מכאן שאכן החבורה $\pi_1(X,a)$ מכילה רק איבר אחד, כלומר טריוויאלית.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-$\pi_1(X,a)$ היא החבורה הטריוויאלית.

תהיינה $a,b\in X$, ותהיינה δ,γ מסילות מ-a ל-b.

אז $\gamma*\bar{\delta}\in\pi_1(X,a)$, ומכאן ש- $[\gamma]=[\delta] \Leftarrow [\gamma][\bar{\delta}]=[\gamma*\bar{\delta}]=[K_a]$

$\Leftarrow$ $\delta \simeq_I \gamma$.

לפי שאלה 3, X פשוט קשר.