

טופולוגיה אלמנטרית 1 - תרגיל בית 4

שאלה 1

הנני שאלה שאלה $f: X \rightarrow Y$ היא נגזרת-הומוטופיה, ואם $a \in X$, אזי

$$f_*: \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(Y, f(a))$$

הוכחה:

f נגזרת-הומוטופיה, כלומר היא הומוטופיה פתוחה-קטעה K_b עבור $b \in Y$

כלשהו. נניח כי $H: X \times I \rightarrow Y$ היא הומוטופיה מ- f ל- b , ונסמן $\gamma(t) = H(a, t)$.

לפי משפט מנהרצאה, $f_* = F_\gamma^{-1} \circ K_b$ (כי הומוטופיה מ- f ל- b).

תהי $[\varphi] \in \pi_1(X, a)$. אזי

$$f_*([\varphi]) = [\gamma] K_b([\varphi]) = [\gamma] [K_b \circ \varphi] = [\gamma] [K_b] [\varphi] = [\gamma] [\varphi] = [K_b \circ \varphi]$$

ולכן f_* הוא ההומומורפיזם הטריבויאלי.

יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים, ויהיו $a, b \in X$. נראה שמתקיים

$$\pi_1(X \times Y, (a, b)) \cong \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$$

היית פירוט: יהיו $p_1: X \times Y \rightarrow X$ ו- $p_2: X \times Y \rightarrow Y$ ההטלות. נראה שההטלות הן איזומורפיזמים. יהי $f: \pi_1(X \times Y, (a, b)) \rightarrow \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$ הנגזרת מן ה- p_1, p_2 . יהי $g \mapsto (p_{1*}(g), p_{2*}(g))$ היא איזומורפיזם.

(הוכחה):

נסמן את ההטלות f . נזכור כי f איזומורפיזם:

א. f נומומורפיזם: יהיו $[\varphi], [\psi] \in \pi_1(X \times Y, (a, b))$. אז

$$\begin{aligned} f([\varphi][\psi]) &= (p_{1*}([\varphi][\psi]), p_{2*}([\varphi][\psi])) = (p_{1*}([\varphi]) p_{1*}([\psi]), p_{2*}([\varphi]) p_{2*}([\psi])) = \\ &= (p_{1*}([\varphi]), p_{2*}([\varphi])) (p_{1*}([\psi]), p_{2*}([\psi])) = f([\varphi]) f([\psi]) \end{aligned}$$

ב. f חד-חד ערכית: נניח כי $[\varphi], [\psi] \in \pi_1(X \times Y, (a, b))$ מקיימים

$$f([\varphi]) = f([\psi])$$

$$(p_{1*}([\varphi]), p_{2*}([\varphi])) = (p_{1*}([\psi]), p_{2*}([\psi]))$$

$$\downarrow$$

$$([p_1 \circ \varphi], [p_2 \circ \varphi]) = ([p_1 \circ \psi], [p_2 \circ \psi])$$

$$p_2 \circ \varphi \sim_{\partial I} p_2 \circ \psi \quad \text{וכן} \quad p_1 \circ \varphi \sim_{\partial I} p_1 \circ \psi$$

נסמן $K: I \times I \rightarrow X$ הומוטופיה מ- $p_1 \circ \varphi$ ל- $p_1 \circ \psi$ יחסית ל- ∂I ,

ונסמן $S: I \times I \rightarrow Y$ הומוטופיה מ- $p_2 \circ \varphi$ ל- $p_2 \circ \psi$ יחסית ל- ∂I .

$$T: I \times I \rightarrow X \times Y \quad \text{יהי} \quad T(s, t) = (K(s, t), S(s, t))$$

(1) T רציפה, כי היא רציפה בכל רכיביה.

$$T(s, 0) = (K(s, 0), S(s, 0)) = (p_1 \circ \varphi)(s), (p_2 \circ \varphi)(s) = \varphi(s), \quad s \in I \quad (2)$$

$$T(s, 1) = (K(s, 1), S(s, 1)) = (p_1 \circ \psi)(s), (p_2 \circ \psi)(s) = \psi(s)$$

$$(3) \quad s \in \partial I \quad \text{ול} \quad t \in I$$

$$T(s, t) = (K(s, t), S(s, t)) \underset{\substack{K \text{ ו-} S \text{ הומוטופיות} \\ \text{יחסית ל-} \partial I}}{\sim} (K(s, 0), S(s, 0)) = T(s, 0)$$

בסק הכלל, T הומוטופיה מ- φ ל- ψ , ולכן $[\varphi] = [\psi]$.

ג. f הי: ניקח $([\varphi], [\psi]) \in \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$. נגדיר $\chi: [0, 1] \rightarrow X \times Y$

$$\text{יהי} \quad \chi(t) = (\varphi(t), \psi(t)) \quad \text{כי היא רציפה בכל רכיביה,}$$

$$\chi(0) = (\varphi(0), \psi(0)) = (a, b), \quad \chi(1) = (\varphi(1), \psi(1)) = (a, b), \quad f([\chi]) = ([\varphi], [\psi]), \quad \text{כברונו.}$$

בסק הכלל, f איזומורפיזם.

יהי X קטיר אוסילטור. נראה שהתנאים הבאים הן שקולים:

א. X פשוט קטיר.

ב. לכל שתי נקודות $a, b \in X$ מתקיים של שתי אוסילטורים $a \sim b$.

הומוטופיות ביחס ל- I .

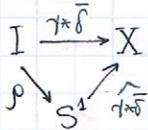
ג. קיימות שתי נקודות $a, b \in X$ שאינן שקולות ל- $a \sim b$.

הומוטופיות ביחס ל- I .

הוכחה:

א \leftarrow ב תהייה $a, b \in X$, ותהייה γ שתי אוסילטורים $a \sim b$.

X פשוט קטיר, ולכן γ^* נגזרת הומוטופיה ביחס ל- I .



(נספר: S^1 מרחב מניה של I לפי יחס השקילות)

המזדה את 0 ואת 1 . $\delta^* \gamma$ מכבה את יחס

השקילות החד, ולכן ניתן להגדיר $X \rightarrow S^1: \hat{\gamma}^* \delta$. (היא נגזרת הומוטופיה,

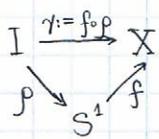
ולכן $\delta^* \gamma$ נגזרת הומוטופיה ביחס ל- I .)

אם כן, קיים $c \in X$ שקולו $K_c \sim \delta^* \gamma$. אז כן,

$$[\gamma^* \delta] = [\gamma][\delta] = [K_c] \Rightarrow [\gamma] = [\delta]$$

ב \leftarrow ג טריוויאלי.

ג \leftarrow א תהייה $a, b \in X$ שתי נקודות המקיימות את התנאי ב, γ ,



ותהי $f: S^1 \rightarrow X$. מרחב מניה של I , f .

ולכן ניתן להגדיר $\gamma = f \circ \hat{\gamma}$ רצוף, המכבה

את יחס השקילות, כלומר $\gamma(0) = \gamma(1) = c$.

X קטיר אוסילטור, ולכן קיימת אוסילטור $a \sim c$ ווסילטור $b \sim c$

א-ב. נשים לב ש- $\delta_{ac}^* \delta_{cb}^* \delta_{cb}^* \delta_{ac}^* \delta_{cb}^* \delta_{ac}^* \delta_{cb}^*$ אוסילטור $a \sim b$.

$$[\delta_{ac}^* \delta_{cb}^*] = [\delta_{ac}^* \gamma^* \delta_{cb}^*] \quad \text{כלומר,} \quad \delta_{ac}^* \delta_{cb}^* \sim_{\hat{\gamma}} \delta_{ac}^* \gamma^* \delta_{cb}^*$$

$$\Downarrow$$

$$[\delta_{ac}][\delta_{cb}] = [\delta_{ac}][\gamma][\delta_{cb}] \Rightarrow [\gamma] = [K_c] \Rightarrow \gamma \sim_{\hat{\gamma}} K_c$$

ולכן γ נגזרת הומוטופיה ביחס ל- I , ומכאן, מהסדר צומח להסדר החזק

הראשון, f נגזרת הומוטופיה.

יהי X קשר מסתור. $\pi_1(X, a) = \{1\}$, כלומר $\pi_1(X, a)$ היא החבורה הטריוויאלית.

הוכחה:

\Leftarrow נניח ש- X פלט קשר, ונתה $[\varphi] \in \pi_1(X, a)$.

φ ו- K_a קו מסלול a -דגומ, ודק, דפי 3 סגול ס', φ .

$$\varphi \sim K_a \Rightarrow [\varphi] = [K_a]$$

מכאן שאם החבורה $\pi_1(X, a)$ מכסה רק איבר אחד, כלומר טריוויאלית.

\Rightarrow נניח ש- $\pi_1(X, a)$ היא החבורה הטריוויאלית.

תנינו $a, b \in X$, ותנינו γ, δ מסלול a -ד b .

$$[\gamma] = [\delta] \Leftarrow [\gamma][\delta] = [\gamma * \delta] = [K_a]$$

$$\Leftarrow \delta^{-1} \gamma$$

דפי אדמה 3, X פלט קשר.

2-3

3-2

יהי X קשר מסתור, $\pi_1(X, a) = \{1\}$.

נניח ש- X פלט קשר, ונתה $[\varphi] \in \pi_1(X, a)$.

φ ו- K_a קו מסלול a -דגומ, ודק, דפי 3 סגול ס', φ .

$$\varphi \sim K_a \Rightarrow [\varphi] = [K_a]$$

מכאן שאם החבורה $\pi_1(X, a)$ מכסה רק איבר אחד, כלומר טריוויאלית.