תרגול 11

13 ביוני 2016

תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $W \subset V$ תת מרחב מאותו מימד $(dim_{\mathbb{F}}V = dim_{\mathbb{F}}W = n)$. הוכח: $W = V$.
הוכחה: נבחר $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ בסיס ל W. בפרט $span(B) = W$
ו Bקבוצה בת"ל. כיוון ש Bעם n איברים אזי לפי השלישי חינם $span(B) = V$. (B פורשת את V)■
תרגיל: היה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $B = \{v_1, \dots v_n\}$ בסיס.
אזי כל וקטור $v \in V$. ניתן להצגה יחידה באיברי בסיס B.
פתרון: כיוון ש $span(B) = V$ ניתן לכתוב $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ נניח כי ניתן להציג את v גם
כ $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ אזי $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ כלומר $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0$
כיוון ש B בת"ל לכל i $\alpha_i - \beta_i = 0$ כלומר לכל i $\alpha_i = \beta_i$ ■

4 המרחביים היסודיים של מטריצה

תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אזי 4 המרחבים היסודיים של A הם:

1. מרחב העמודות $C(A) := \{Ax \,|\, x \in \mathbb{F}^n\} = span\{C_1(A), \dots, C_n(A)\} \subset \mathbb{F}^m$
2. מרחב השורות $C(A^t) = R(A) := \{A^t x \,|\, x \in \mathbb{F}^m\} = span\{R_1(A), \dots, R_n(A)\} \subset \mathbb{F}^n$
3. מרחב האפס $N(A) := \{x \in \mathbb{F}^n \,|\, Ax = 0\} \subset \mathbb{F}^n$

מרחב השורות

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ותהא $E \in \mathbb{F}^{m \times m}$ מטריצה הפיכה. נסמן $EA = U \in \mathbb{F}^{m \times n}$.
הוכח $R(A) = R(U)$.
הוכחה: (להסביר את הגדרת מרחב השורות ומה זה להיות במרחב השורות וכן תכונת שחלוף של כפל מטריצות)
$(\supseteq)$ יהא $U^t x \in R(U)$
אזי $U^t x = (EA)^t x = A^t E^t x = A^t (E^t x) = A^t y \in R(A)$.
$(\subseteq)$יהא $A^t x \in R(A)$
אזי $A^t x = (E^{-1}U)^t x = (U^t (E^{-1})^t) x = U^t [(E^t)^{-1} x] = U^t y \in R(U)$. ■
מסקנה: בפרט אם E מכפלה של מטריצות אלמנטריות המעבירות את A לצורה מדורגת/קנונית.
תרגיל/דוגמא: תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ מצא את $R(A)$.

פתרון: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

כיוון שמרחב השורות של A שווה למרחב השורות לאחר דירוג נקבל ש

$$R(A) = span\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} a \\ 2a+b \\ 3a \\ 4a+b \end{pmatrix}\}$$

מרחב העמודות

את מרחב העמודות ניתן למצוא כמו את מרחב השורות ע"י מעבר ל A^t. נראה עוד דרך:

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ונניח שאחר דירוג העמודות $1,\cdots,l$ הן עמודות עם ציר. הוכח $\{C_1(A),\cdots C_l(A)\}$ בסיס למרחב העמודות.

פתרון: נסמן $EA = U$. כאשר U הצורה המדורגת של A ו $A = E^{'}U$ כאשר $E^{-1} = E^{'}$

בת"ל: נניח $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i C_i(A) = 0$ אבל $C_i(A) = E^{'}C_i(U)$ ולכן

$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i E^{'} C_i(U) = 0$ ע"י הכפלה בהופכית של $E^{'}$ נקבל $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i C_i(U) = 0$

ולכן $\alpha_i = 0$ לכל i כי עמודות עם ציר הן בת"ל.

פורשת: מ"ל שלכל $l < s \leq n$

מתקיים $C_s(A) \in span\{C_1(A),\cdots C_l(A)\}$. (לפי תרגיל מש.ב.)

ברור כי $C_s(U) \in span\{C_1(U),\cdots C_l(U)\}$

בנוסף $C_i(U) = EC_i(A)$ ולכן אם $C_s(U) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i C_i(U)$ אזי $EC_s(A) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i EC_i(A)$

ולכן ע"י הכפלה בהופכית נקבל $C_s(A) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i C_i(A)$.■

הערות:

1. התרגיל נכון גם אם עמודות הצירים הן אינן העמודות הראשונות דווקא.
2. מרחב העמודות של U אינו שווה למרחב העמודות של A.

דוגמא: מצא את מרחב העמודות של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

פתרון: אחרי דירוג קיבלנו $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן מרחב העמודות הוא

$$span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

($\neq span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ כי $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$)

מרחב האפס

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ותהא $E \in \mathbb{F}^{m\times m}$ מטריצה הפיכה. נסמן $EA = U \in \mathbb{F}^{m\times n}$.
הוכח $N(A) = N(U)$.

פתרון: $(\supseteq)$ יהא $x \in N(U)$ אזי $Ux = 0$ לפי הגדרה ולכן $Ax = E^{-1}Ux = E^{-1}0 = 0$ ולכן $x \in N(A)$

$(\subseteq)$ יהא $x \in N(A)$ אזי $Ax = 0$ ולכן $Ux = EAx = E0 = 0$ ולכן $x \in N(U)$. ■

תרגיל: מצא את מרחב האפס של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

פתרון: אחרי דירוג קיבלנו $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן מרחב האפס הוא $(z = t, w = s)$

$$span\{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} = s\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s-3t \\ -s \\ t \\ s \end{pmatrix}.$$

סיכום (אלגוריתם למציאת 4 המרחבים)

בהנתן מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ נדרג את המטריצה ואז:

1. שורות השונות מאפס מהוות בסיס למרחב השורות.
2. עמודות המטריצה המקורית המתאימות לעמודות ציר מהוות בסיס למרחב העמודה.
3. ע"י הצבת פרמטרים במשתנים החופשיים נמצא את הפתרון הכללי. ממנו נסיק את הבסיס למרחב האפס.
4. במרחב האפס השמאלי נטפל בנפרד ע"י שחלוף A וחזרה לסעיף 3.