

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

8 במאי 2016

תרגיל 6 - התפלגויות בדידות מיוחדות

1. נגדיר סדרה של משתנים מקריים באופן הבא: $X_0 = c$ (קבוע) ולכל n , בהנתן X_n , המשתנה X_{n+1} מתפלג פואסונית עם פרמטר X_n .

(א) חשב את התוחלת של כל X_n .

(ב) חשב את השונות של כל X_n .

(ג) אם $n < m$, חשב את השונות המשותפת של X_n ו- X_m .

2. X_k מ"מ המתאר מכונה שמייצרת בדיוק $k = 1, \dots, 10$ סוכריות, מתפלג פואסונית עם פרמטר $\lambda = 2$.

(א) כיצד מתפלג המשתנה $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ לכל n ?

(ב) חשב את ההתפלגות של S_2 בהנתן $S_9 = 15$.

(ג) מצאו את ההתפלגות של $S_9 | (S_2 = 2)$.

3. שני שותפים קונים כרטיסי-גירוד בזה אחר זה עד להצלחה הראשונה, ומחלקים אותם ביניהם על-ידי הטלת מטבע. מה התפלגות מספר הכרטיסים של השותף הראשון בסוף התהליך?

הדרכה: הגדירו מהי ההתפלגות של המ"מ " X " קניית כרטיסים עד להצלחה ראשונה."

הגדירו מהי ההתפלגות של המ"מ " Y "- חלוקת הכרטיסים ע"י הטלת מטבע". שימו לב, האם לקשר בין X ו- Y .

4. אנשים נכנסים לחנות בגדים בקצב "פואסוני" של 30 בכל שעה. מצאו :

(א) מהי ההסתברות שבמשך 5 דקות ייכנסו לפחות 4 אנשים.

(ב) מהי ההסתברות שבמשך 10 דקות ייכנסו לפחות 4 אנשים.

(ג) מהי התוחלת של מספר האנשים הנכנסים ב- N דקות.

5. יהיו $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\mu)$ משתנים בלתי תלויים. יהי $Z = X + Y$.

מצאו את ההתפלגות של X בהינתן $Z = n$.

6. מספר התקלות בקו ייצור הוא משתנה מקרי פואסוני כשקצב התקלות הוא 5 תקלות ליום.

(א) מהי ההסתברות לתקלה אחת לפחות במשך יום שלם?

(ב) מהי ההסתברות שבמשך יומיים לא תתרחש אף תקלה?

(ג) מהי ההסתברות שבמשך חודש עבודה (25 יום) יהיו לפחות 10 ימים "מוצלחים", כאשר יום "מוצלח" מוגדר כיום עם תקלה אחת לכל היותר?

7. יוסי ורינה משחקים בהטלת מטבע (לא הוגן). בכל הטלה, אם יוצא "ראש" יוסי ישגיח על הילדים שלהם במשך חמש שעות, אחרת, רינה תעשה זאת. ידוע שמתקבל "ראש" בהסתברות $\frac{9}{19}$ ו-"זנב" בהסתברות $\frac{10}{19}$. יוסי מטיל את המטבע שוב ושוב עד לזכייתו הרביעית.

(א) מהי ההסתברות שהמטבע תוטל 9 פעמים בסה"כ?

(ב) מהי תוחלת שעות ההשגחה של יוסי לאחר שהוא ורינה מפסיקים לשחק?

8. אדם מנסה לחייג למדור תל"מ באוניברסיטה. מניסיונות קודמים ידוע כי ההסתברות לקבל מענה בכל ניסיון חיוג הוא 0.25. אדם שמחייג למדור תל"מ באוניברסיטה ממשיך לחייג עד לקבלת מענה. מהי ההסתברות:

(א) שיחייג למדור תל"מ בדיוק 9 פעמים?

(ב) שיחייג למדור תל"מ יותר מ 4 פעמים?

(ג) חשבו את תוחלת מספר נסיונות החיג למדור תל"מ.

9. מהגדרת ההתפלגות ההיפרגאומטרית נובע שלכל a, b, n :

$$\sum \text{binom}(a, k) \text{binom}(b, n - k) = \text{binom}(a + b, n)$$

בכיתה הוכחנו את הנוסחה הזו באמצעות "סיפור קומבינטורי", כלומר ספירת האיברים באותה קבוצה בשתי דרכים שונות. חבר סיפור קומבינטורי המוכיח ש-

$$\sum \text{binom}(a, k) * \text{binom}(b, n - k) * k = \text{binom}(a + b - 1, n) * a$$

10. בכתה 50 תלמידים. מהי ההתפלגות של מספר התלמידים החולקים יום הולדת משותף עם המרצה? מה הסיכוי שיש בכתה שניים כאלה? (תן תשובה מספרית, ולא נוסחה המערבת מקדמים בינומיים קשים לחישוב).

11. מטילים מטבע הוגן באקראי 10,000 פעם.

(א) כמה רצפים צפויים? (למשל, ב-00111101110 יש חמישה רצפים).

(ב) מה הסיכוי שמספר הרצפים שנקבל יהיה בדיוק שווה לזה הצפוי?