אינפי 4 תרגול 9

26 במאי 2015

משפט סטוקס:

יהי S משטחו חלק ששפתו היא העקומה C. אזי, לכל שדה וקטורי:

$$F(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

כאשר $P,Q,R:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ גזירות ברציפות, משפט סטוקס אומר שמתקיים:

$$\int\limits_C F d\vec{r}=\iint\limits_S (\nabla\times F)\cdot\vec{n}dS$$

האינטגרל משמאל הוא אינטגרל מסילתי מסוג שני, האינטגרל משמאל הוא אינטגרל משטחי.

הוקטור $\nabla\times F$ מסומן גם ב$-curlF$. נשים לב לכך ש:

$$\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

האוריינטציה של המשטח ושל העקומה מתאימות זו לזו.

כלומר, אם נרצה לחשב אינטגרל מסילתי לאורך העקומה בכיוון הטבעי (כאשר המשטח אותו העקומה כולאת נמצא משמאלנו כאשר אנחנו מתקדמים לאורך העקומה) נתאים לו את האינטגרל המשטחי עם הנורמל הטבעי (בכיוון החיצוני), וכן להיפך.

אפשר לכתוב את משפט סטוקס גם כך:

$$\int\limits_C Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרלים הבאים.

א. $\int_C (y+2z)dx+(x+2z)dy+(x+2y)dz$ והעקומה C היא חיתוך הספירה $x^2+y^2+z^2=1$ עם המישור $x+2y+2z=0$.

<u>פתרון:</u>

במקרה זה, $P=y+2z, Q=x+2z, R=x+2y$.

נחשב את נורמל היחידה למישור שלנו:

$$\vec{n}=\frac{(1,2,2)}{\sqrt{1+2^2+2^2}}=\frac{1}{3}(1,2,2)$$

כמו כן:

$$\nabla\times F=(2-2,2-1,1-1)=(0,1,0)$$

ולכן האינטגרל שלנו הוא:

$$\int\limits_C=\iint\limits_S(0,1,0)\cdot(1,2,2)\frac{1}{3}dS=\frac{2}{3}\iint\limits_S dS$$

האינטגרל שקיבלנו מחשב את שטחו של המשטח שכולאת העקומה C.

העקומה היא חיתוך של מישור וספירה; חיתוך כזה הוא מעגל. מהו אורך הרדיוס של מעגל כזה?

המישור שלנו עובר בראשית הצירים, ולכן המעגל הוא "מעגל גדול", כלומר רדיוסו הוא רדיוס הספירה.

במקרה שלנו $r = 1$ ולכן שטח S הוא π, ולכן:

$$\int\limits_C = \iint\limits_S (0,1,0)\cdot(1,2,2)\frac{1}{3}dS = \frac{2}{3}\iint\limits_S dS = \frac{2\pi}{3}$$

וזהו האינטגרל.

ב. $\int_C y^3dx - x^3dy + z^3dz$ והעקומה C היא חיתוך של הגליל $x^2+y^2=a^2$ עם המישור $x+y+z=b$.

<u>פתרון:</u>

במקרה זה $P = y^3, Q = -x^3, R = z^3$.

הנורמל למשטח הוא:

$$\vec{n} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

כמו כן:

$$\nabla \times F = (0-0, 0-0, -3x^2-3y^2)$$

ולכן האינטגרל שלנו הוא:

$$\int\limits_C = \iint\limits_S (0,0,-3x^2-3y^2)\cdot(1,1,1)\frac{1}{\sqrt{3}}dS = -\sqrt{3}\iint\limits_S x^2+y^2dS$$

אנחנו נמצאים על הגליל $x^2+y^2=a^2$ ולכן:

$$= -\sqrt{3}a^2\iint\limits_S dS$$

כעת, כדי לחשב את שטח המשטח, נטיל אותו אל המישור xy.

הפונקציה היא: $z = b-x-y$, ואלמנט השטח הוא:

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{3}$$

ולכן:

$$= -\sqrt{3}a^2 \iint\limits_D \sqrt{3} dxdy = -3a^2 \iint\limits_D dxdy$$

כעת, המשטח שלנו הוא מעגל, וכשהטלנו אותו על מישור xy נקבל מעגל שרדיוסו a, ושטחו הוא πa^2 ולכן:

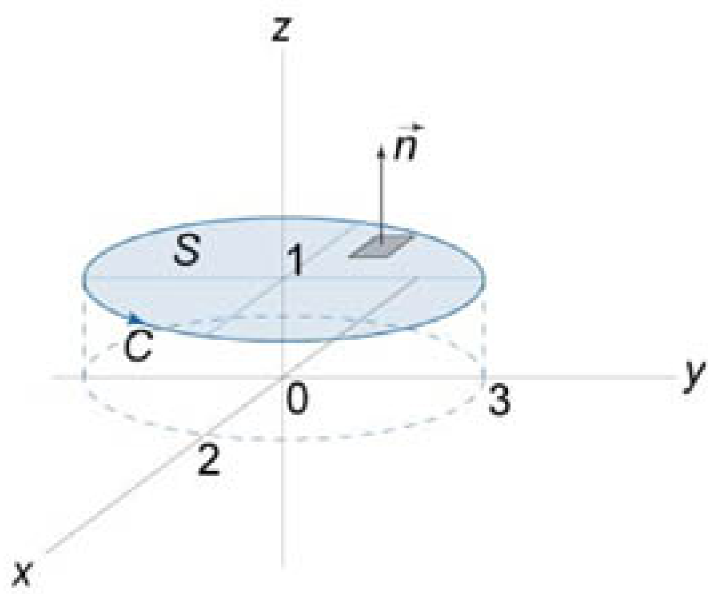
$$\int\limits_C = -3a^2 \cdot \pi a^2 = -3\pi a^4$$

וזהו האינטגרל. נשים לב שאת האינטגרל הזה למדנו לחשב בתרגולים הקודמים (עם פרמטריזציה וכן הלאה), ולכן אם נפנופי הידיים הגיאומטריים לא ברורים די הצורך, אפשר לחשב את האינטגרל כמו שצריך ולהיווכח שאכן כך הוא.

ג. $\int_C (x+z)dx + (x-y)dy + xdz$ כאשר C היא שפת האליפסה $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, z = 1$.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו הוא:



במקרה זה $P = x + z, Q = x - y, R = x$.

נחשב את הנורמל:

$$\vec{n} = \frac{(0,0,1)}{\sqrt{0+0+1}} = (0,0,1)$$

כמו כן:

$$\nabla \times F = (0-0, 1-1, 1-0) = (0,0,1)$$

ולכן האינטגרל הוא:

$$\int\limits_C = \iint\limits_S (0,0,1)\cdot(0,0,1)dS = \iint\limits_S dS$$

האינטגרל הזה, כמו שאנו יודעים, מחשב שטח. במקרה שלנו S היא אליפסה עם צירים $a=2, b=3$ ולכן:

$$\int\limits_C = \pi ab = 6\pi$$

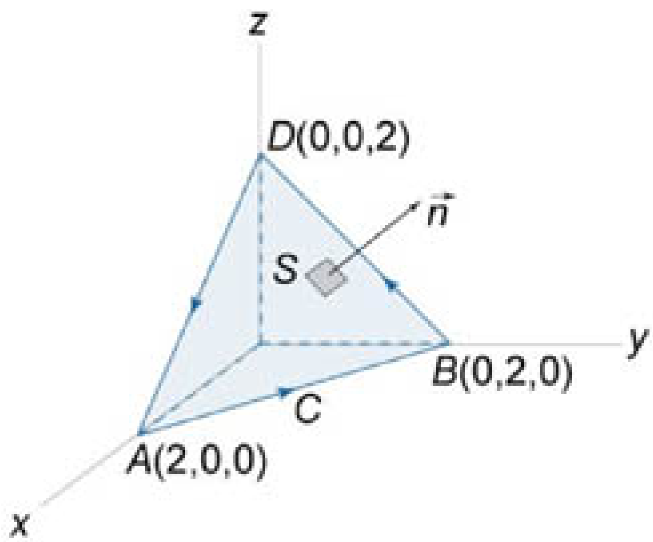
וזהו האינטגרל.

ד. $\int_C (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$ כאשר C היא שפת המשולש שקודקודיו נמצאים בנקודות:

$$A(2,0,0), B(0,2,0), D(0,0,2)$$

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו הוא:



המישור ABD נתון ע"י המשוואה $x+y+z=2$ (זה לא מסובך למצוא משוואת מישור בעזרת 3 נקודות שעליו; אנא היזכרו בחומר שלמדתם בתיכון).

לכן, הנורמל יהיה:

$$\vec{n} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

כמו כן:

$$\nabla \times F = (1-(-1), 1-(-1), 1-(-1)) = (2,2,2)$$

ולכן האינטגרל יהיה:

$$\int_C = \iint_S (2,2,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) dS = 2\sqrt{3} \iint_S dS$$

כעת, האינטגרל שקיבלנו מחשב את שטח המשולש. אפשר לחשב את שטחו של המשולש בכמה דרכים (זהו משולש שווה צלעות, לכן כל הזוויות הן $\frac{\pi}{3}$, ואורך כל צלע הוא $\sqrt{8}$).

שטח המשולש הוא $2\sqrt{3}$ ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\int_C = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 12$$