נכתב על ידי יהונתן רגב

תזכורת

תהי f פונקציה ויהי $r > 0$ כך ש: f גזירה מכל סדר בקטע $[-r,r]$.

אם קיים $c \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [-r,r]$ מתקיים: $\left|f^{(n)}(x)\right| < c$, אז:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

הערה

לכל $x \in [-r,r]$, ניתן לפתח את $f(x)$ עד $n \in \mathbb{N}$ מחוברים, ולחסום את השגיאה $r_n(x)$ עפ"י פיתוח טיילור הסופי או עפ"י מבחן לייבניץ (כמובן, כאשר מתקיימים תנאי המשפטים).

דוגמה

$$\boxed{f(x) := e^x \,, \qquad x \in \mathbb{R}}$$

<u>לכל $0 \le r$</u>

לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

לכל $x \in [-r,r]$ מתקיים: $\left|f^{(n)}(x)\right| \le e^r$.

לכן, לכל $x \in [-r,r]$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

הנ"ל נכון לכל $0 \le r$, לכן השוויון נכון לכל $x \in \mathbb{R}$.

בפרט, עבור $x = 1$:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

אם נרצה לדעת "כמה מהר" הטור מתכנס עבור x ספציפי, ניתן להשתמש בחסם השגיאה $r_n(x)$ מפיתוח טיילור הסופי, כלומר:

$$\exists c\in[0,x]\vee c\in[x,0]:\ \ r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$$

למשל, כאן:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}+r_n(x)$$

$$\Downarrow$$

$$r_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$$

■

דוגמה

$$\boxed{f(x)\coloneqq e^{-x}\,,\qquad x\in\mathbb{R}}$$

עפ"י הדוגמה הקודמת:

$$e^{-x}=e^{(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x)^n$$

כאן, ניתן לחסום את השגיאה לפי מבחן לייבניץ:

$$r_n(x)\le\left|\frac{1}{n!}\cdot(-x)^n\right|=\frac{|x|^n}{n!}$$

■

דוגמה

$$\boxed{f(x)\coloneqq \sin(x)\ ,\qquad x\in\mathbb{R}}$$

לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\sin x\,, & n=4k\\ \cos x\,, & n=4k+1\\ -\sin x\,, & n=4k+2\\ -\cos x\,, & n=4k+3\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$$

לכן:

$$\sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

לכן, לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} + r_n(x)$$

<u>הערה</u>: השגיאה $r_n(x)$ מתייחסת לטור הנ"ל, ולא לטור הרגיל, כדי ש"נרוויח" מכך שחלק מהאיברים הם 0.

בפרט, עבור $x = \pi/4$, כיוון ש - $0 < x$, הטור בעל סימנים מתחלפים, לכן:

$$|r_n(x)| \leq \left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right| < \frac{1}{(2n+1)!}$$

■

דוגמה

$$\boxed{f(x) \coloneqq \cos(x)\ , \qquad x \in \mathbb{R}}$$

עפ"י גזירה איבר איבר של $\sin(x)$:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

דוגמה

$$\boxed{f(x) \coloneqq \frac{1}{1-x}\ , \qquad x \in (-1,1)}$$

מתקיים:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

עפ"י גזירה איבר איבר:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n}$$

עפ״י גזירה איבר איבר :

$$\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\cdot n\cdot x^{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\cdot(n+1)\cdot x^{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^{n}$$

באופן כללי (**תרגיל** : הוכח!)

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^{n}$$

$$\blacksquare$$

הערה

כאשר חוסמים את השגיאה לפי מבחן לייבניץ, יש לוודא כי סדרת הערכים המוחלטים מונוטונית לבסוף. יש לזכור כי x קבוע – המונוטוניות נבדקת לפי n.

דוגמה

$$\boxed{f(x)\coloneqq\log(1+x)\ ,\qquad x\in(-1,1)}$$

לכל $t\in[0,x]$:

נכתב על ידי יהונתן רגב

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot t^n$$

עפ״י אינטגרציה איבר איבר:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\cdot t^n\,dt$$

מתקיים:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt=[\log(1+t)]_0^x=\log(1+x)$$

$$\int_0^x(-1)^n\cdot t^n\,dt=\left[(-1)^n\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x=(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

עבור $x=1$, הטור מתכנס (למשל, עפ״י לייבניץ). לכן, עפ״י משפט, סכומו הוא פונקציה רציפה משמאל ב - 1. גם הפונקציה $\log(1+x)$ רציפה ב - 1.

לכן (נפעיל גבול על שני האגפים, ועפ״י יחידות הגבול):

$$\log 2=\log(1+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\log 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

אומדן השגיאה בחישוב $\log 2$:

$$|r_n(1)| \le \frac{1}{n+1}$$

לכן, "יהיה קשה לחשב את $\log 2$ בקירוב טוב".

נראה "טריק" להאצת החישוב של $\log 2$, ואף חישוב של $\log N$ לכל $N \in \mathbb{N}$.

לכל $x \in (-1,1)$, מתקיים:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}$$

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x)$$

$$\Downarrow$$

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

כאשר x עובר על $(-1,1)$, המנה $1+x/1-x$ מכסה את $\mathbb{R}^+$.

בפרט, כדי לקבל 2:

$$\frac{1+x}{1-x} = 2$$

$$\Downarrow$$

$$1 + x = 2 - 2x$$

$$\Downarrow$$

$$3x = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{1}{3}$$

לכן:

$$\log 2 = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{2n+1}$$

נחסום את השגיאה (ניקח n איברים ראשונים):

$$r_n\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$r_n\left(\frac{1}{3}\right) \leq 2 \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$r_n\left(\frac{1}{3}\right) \overset{\substack{\text{טור} \\ \text{הנדסי}}}{\leq} 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3}}{1 - \frac{1}{9}}$$

$$\Downarrow$$

$$r_n\left(\frac{1}{3}\right) \leq \frac{9}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3}$$

$$\blacksquare$$

דוגמה

$$\boxed{f(x) \coloneqq \arctan x \ , \qquad x \in \mathbb{R}}$$

לכל $t \in [0, x]$:

$$(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$$

$$(\arctan t)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n$$

$$(\arctan t)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$

עפ"י אינטגרציה איבר איבר בקטע $[0, x]$:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

הטור מתכנס ב - $x = 1$ (למשל, עפ"י לייבניץ).

לכן :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

לכן, "יהיה קשה לחשב את π בקירוב טוב".

ניעזר ב $x -$ אחר.

מתקיים :

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

לכן :

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi = 6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1}$$

לביטוי זה התכנסות "מהירה" (בשל הכפל בטור ההנדסי).

■

נכתב על ידי יהונתן רגב

דוגמה

$$\boxed{f(x) \coloneqq \frac{\sin(x)}{x}\ , \qquad x \in (0,1]}$$

מתקיים:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

לכן:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}\ \ dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \int_0^1 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + r_n(x)\, dx$$

אם לכל $x \in (0,1]$ מתקיים: $|r_n(x)| \le c$, אז:

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx - \int_0^1 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4\, dx \right| \le 2c \cdot (1-0)$$

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx - \int_0^1 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4\, dx \right| \le 2c$$

■

– סוף הקורס –