תרגיל 12 מבוא לתורת החבורות

שאלה 12.1 נתונה $G = S_3$ ונתון שהיא פועלת על הקבוצה $X = \{R, G, B\}$. נתון עוד כי

$$(123) * R = G$$

$$(12) * R = B$$

מצאו לפי אינפורמציה זו את הפעולה של כל איבר בחבורה על כל איבר בקבוצה X. אפשר לתאר את הפעולה באמצעות טבלת כפל. כל שורה מתאימה לאיבר $g \in G$ וכל עמודה לאיבר $x \in X$ התא בשורה g בעמודה x יכיל את האיבר $g * x = gx$.

פתרון: נתחיל בלמצוא בדיוק את הפעולה של (123). היות שהוא פועל על ידי תמורה לא ייתכן ש

$$(123) * G = G$$

כי אחרת הפעולה לא תהיה חד חד ערכית. עכשיו, נניח בשלילה ש

$$(123) * G = R$$

אז

$$R = \mathrm{id} * R = (123)^3 * R = (123)^2 * G = (123) * R = G$$

וזאת סתירה. ולכן בהכרח

$$(123) * G = B$$

בגלל שכל איבר פועל על ידי תמורה, בהכרח יתקיים

$$(123) * B = R$$

אז אנחנו מבינים לגמרי איך (123) פועל. עכשיו, אם

$$(12) * R = B$$

אז ע"י כפל משמאל ב (12) נראה כי

$$R = (12) * B$$

ושוב בגלל ש (12) פועל על ידי תמורה אז בהכרח

$$(12) * G = G$$

אז אנחנו מבינים איך (12) פועל. מה קורה עם שאר האיברים? בגלל שכל אחד מהם הוא מכפלה של (123) ושל (12) אפשר לחשב בקלות מה כל איבר עושה. בסוף נגיע לטבלא

$*$	B	R	G
id	B	R	G
(12)	R	B	G
(123)	R	G	B
$(132) = (123)^2$	G	B	R
$(23) = (12)(123)$	B	G	R
$(13) = (123)(12)$	G	R	B

שאלה 12.2 1. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X ־ נסמן את הפעולה ב $*$. תהי $N \lhd G$ תת חבורה נורמלית. ננסה להגדיר פעולה של G/N על X לפי

$$gN \diamond x = g * x$$

האם זה מגדיר פעולה של G/N על X? הוכיחו או הפריכו.
פתרון: לא. הפעולה לא מוגדרת היטב. אפשר לקחת למשל $N = G = S_2$ ו $X = \{1,2\}$ עם הפעולה הסטנדרטית. אז שני האיברים של S_2 הם באותו קוסט

$$(12)N = \mathrm{id}\, N$$

אבל

$$\mathrm{id}\, N \diamond 1 = \mathrm{id} * 1 = 1$$

$$(12)N \diamond 1 = (12) * 1 = 2$$

בסתירה.

2. תהי G חבורה ו $N \lhd G$ תת חבורה נורמלית. נתון כי G/N פועלת על X ־ נסמן את הפעולה ב $*$. ננסה להגדיר פעולה של G על X לפי

$$g \diamond x = gN * x$$

האם זה מגדיר פעולה של G/N על X? הוכיחו או הפריכו.
פתרון: כן. זה מגדיר פעולה. ברור שהפעולה מוגדרת היטב (היא לא הוגדרה על ידי נציגים). איבר היחידה $e \in G$ אכן מקיים ש

$$e \diamond x = eN * x = x$$

וזאת מפני ש eN הוא איבר היחידה של G/N.

כמו כן,

$$g \diamond (h \diamond x) = g \diamond (hN * x) = gN * (hN * x) = (gN \cdot hN) * x = ghN * x = gh \diamond x$$

כנדרש

שאלה 12.3 תהי X קבוצת כל הלוחות 2×2 שכל ריבוע שלהם צבוע באחד משני הצבעים שחור/לבן. שימו לב שיש $2^4 = 16$ לוחות כאלה. ניקח $G = \mathbb{Z}_4$ ונגדיר פעולה כפי שעשינו בכיתה. כלומר: לכל $a \in \mathbb{Z}_4$ הלוח המתקבל $a * x$ הוא סיבוב הלוח x ב $90 \cdot a$ מעלות. מצאו את כל המסלולים (מה האיברים בכל מסלול?). כמה מסלולים יש?
פתרון: טוב. בואו נגיד ש 1 זה שחור ו 0 זה לבן אז המסלולים הם כאלה:

מסלול 1: $\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

מסלול 2: $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

מסלול 3: $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

מסלול 4: $\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}$, $\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}$.

מסלול 5: $\begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}$, $\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}$, $\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}$, $\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}$

מסלול 6: $\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}$

שאלה 12.4 תהיינה G, H שתי חבורות שפועלות על X, Y בהתאמה. נגדיר פעולה של $G \times H$ על $X \times Y$ באופן הטבעי כלומר

$$(g, h) * (x, y) = (gx, hy)$$

הוכיחו כי המסלולים של הפעולה של $G \times H$ הם בדיוק קבוצות מהצורה $A \times B$ כאשר A מסלול של G ו B מסלול של H.

פתרון: נניח ש O הוא מסלול של $G \times H$. נוכיח שקיימים B,A כך ש A מסלול של G ו B מסלול של H כך ש $O = A \times B$.

נבחר $(a, b) \in O$ כלשהוא. נסמן ב A את המסלול של a תחת הפעולה של G ו ב B את המסלול של b תחת הפעולה של H. נוכיח $O = A \times B$ על ידי הכלה דו כיוונית.

אם $(a', b') \in O$ אז בגלל ש O מסלול קיים איזשהוא $(g, h) \in G \times H$ כך ש

$$(g, h) * (a, b) = (a', b')$$

זה אומר ש

$$ga = a', \quad hb = b'$$

ולכן

$$a' \in A \quad b' \in B$$

כלומר

$$(a', b') \in A \times B$$

וזה מוכיח

$$O \subseteq A \times B$$

מצד שני נבחר $(a', b') \in A \times B$ כלומר $a' \in A$ ו $b' \in B$ אז לפי הגדרת מסלול נקבל שקיימים $g \in G$ ו $h \in H$ כך ש

$$ga = a', \quad hb = b'$$

ולכן

$$(g, h) * (a, b) = (a', b')$$

ולכן

$$(a', b') \in O$$

כלומר

$$A \times B \subseteq O$$

ולכן

$$A \times B = O$$

שאלה 12.5 ניקח את S_n שפועלת על $X = \{1, \dots, n\}$. ראינו כבר שהפעולה הזאת טרנזיטיבית. מצאו את המסלולים של הפעולה של S_n על $X \times X$ המוגדרת לפי

$$\pi \cdot (x, y) = (\pi(x), \pi(y))$$

כמה מסלולים יש?

פתרון: יש שני מסלולים. מסלול 1 מכיל את כל האיברים מהצורה (x, x). כלומר $O_1 = \{(x, x) \mid x \in X\}$ ברור שכולם באותו מסלול כי אפשר לקחת את החילוף $\pi = (xy)$ ואז

$$\pi \cdot (x, x) = (y, y)$$

מצד שני ברור שאין איתם במסלול אף איבר אחר כי תמיד

$$\pi \cdot (x, x) = (\pi(x), \pi(x)) \in O_1$$

עכשיו יש עוד מסלול אחד וזה כל מה שנשאר

$$O_2 = \{(x, y) \mid x \neq y\}$$

למה? כי אם $(x_2, y_2), (x_1, y_1) \in O_2$ כך ש $x_1 \neq y_1$ ו $x_2 \neq y_2$ אז יש תמורה π שתקיים

$$\pi \cdot (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

מהי π? אם כל ארבעת האיברים שונים. אפשר לקחת

$$\pi = (x_1 x_2)(y_1 y_2)$$

אם $x_1 = y_2$ ו $x_2 \neq y_1$ אז אפשר לקחת

$$\pi = (y_1 x_1 x_2)$$

אם $x_1 = y_2$ ו $x_2 = y_1$ אז אפשר לקחת

$$\pi = (x_1 y_1)$$

וכו' בכל מצב קל למצוא תמורה.

שאלה 12.6 1. הוכיחו כי תת חבורה $H \leq G$ היא תת חבורה נורמלית אם ורק אם לכל $a \in G$ מתקיים שמחלקת הצמידות של a מוכלת כולה ב H או ב $G \backslash H$.

פתרון: נניח ש H תת חבורה נורמלית. ותהי $a \in G$. אם $a \in H$ אז לפי תכונה של נורמליות גם $gag^{-1} \in H$ לכל $g \in G$ זה בדיוק אומר שכל מחלקת הצמידות נמצאת ב H. במילים אחרות: אם איבר אחד ממחלקת הצמידות נמצא ב H אז כל מחלקת הצמידות נמצאת ב H. זה בדיוק מה שרצינו להוכיח בכיוון הזה.

מצד שני נניח שהתכונה נכונה. ברור ש H חייבת להיות נורמלית כי אם $a \in H$ אז לכל $g \in G$ האיבר gag^{-1} צמוד ל a ולכן

$$gag^{-1} \in H$$

לפי התכונה וזה בדיוק אומר ש H נורמלית.

2. הוכיחו כי חבורה G היא אבלית אם ורק אם כל מחלקת צמידות מכילה איבר אחד בלבד.

פתרון: נניח G אבלית. ונניח b צמוד ל a. כלומר קיים $g \in G$ כך ש $gag^{-1} = b$ אז בגלל האבליות נקבל

$$a = b$$

כלומר מחלקת הצמידות חייבת להיות רק עם איבר אחד. מצד שני נניח שכל מחלקת צמידות היא עם איבר אחד. אז לכל $a, g \in G$ נקבל ש

$$a = gag^{-1}$$

שזה בדיוק אומר

$$ag = ga$$

כלומר G אבלית.

שאלה 12.7 מצאו את מחלקות הצמידות בחבורה:

1. S_3.

פתרון: קודם כל. id הוא במחלקת צמידות לבד, כי תמיד

$$g \,\mathrm{id}\, g^{-1} = \mathrm{id}$$

בנוסף, כל החילופים באותה מחלקת צמידות כי

$$(23)(12)(23)^{-1} = (23)(12)(23) = (13)$$

$$(13)(12)(13)^{-1} = (13)(12)(13) = (23)$$

עכשיו אין במחלקת הצמידות של החילופים עוד איברים כי אפשר לבדוק שלכל $\pi \in S_3$ מתקיים ש

$$\pi(12)\pi^{-1}$$

הוא גם כל חילוף.

בנוסף שני האיברים שנותרו (123) ו (132) הם גם באותה מחלקת צמידות כי

$$(23)(123)(23)^{-1} = (23)(123)(23) = (132)$$

ולכן קיבלנו 3 מחלקות צמידות:

$$\{\{\mathrm{id}\}, \{(12), (13), (23)\}, \{(123), (132)\}\}$$

2. D_4.

פתרון: כאן נשתמש בתובנה הבאה: אם $A \subseteq D_4$ קבוצה שכל האיברים בה צמודים ובנוסף היא מקיימת שלכל $a \in A$

$$\sigma a \sigma^{-1} \in A$$

ו

$$\tau a \tau^{-1} \in A$$

אז A מחלקת צמידות.

הסבר: צריך להראות לכל $g \in G$ ולכל $a \in A$ חייב להתקיים

$$gag^{-1} \in A$$

עכשיו $g = \tau^l \sigma^k$ עבור l ו k כלשהם. לפי הנתון

$$\sigma a \sigma^{-1} \in A$$

הפעלה שוב ושוב תתן לנו ש

$$\sigma^k a \sigma^{-k} \in A$$

ואז

$$\tau \sigma^k a \sigma^{-k} \tau^{-1} \in A$$

הפעלה שוב ושוב תתן לנו

$$\tau^l \sigma^k a \sigma^{-k} \tau^{-l} \in A$$

כלומר

$$gag^{-1} \in A$$

עשינו למעשה תרגיל דומה בכיתה לגבי תת חבורות נורמליות.

עכשיו אפשר לגשת לפתור את השאלה.

שוב id הוא מחלקת צמידות בפני עצמו. כמו כן σ^2הוא מחלקת צמידות בפני עצמו כי

$$\sigma\sigma^2\sigma^{-1} = \sigma^2$$

ו

$$\tau\sigma^2\tau^{-1} = \sigma^2\tau\tau = \sigma^2$$

עכשיו, σ ו σ^3 הם מחלקת צמידות בפני עצמה כי

$$\sigma\sigma^k\sigma^{-1} = \sigma^k$$

ואילו

$$\tau\sigma\tau = \sigma^3$$

$$\tau\sigma^3\tau = \sigma$$

עכשיו נשאר להבין את האיברים מהצורה $\tau\sigma^k$. τ עם $\tau\sigma^2$ באותה מחלקת צמידות כי

$$\tau\tau\tau^{-1} = \tau$$

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau\sigma^{-2} = \tau\sigma^2$$

ואין עוד איברים במחלקה כי

$$\tau\tau\sigma^2\tau^{-1} = \tau\sigma^2$$

$$\sigma\tau\sigma^2\sigma^{-1} = \tau$$

באופן דומה מראים ש $\tau\sigma$ ו $\tau\sigma^3$ באותה מחלקה ולכן לסיכום המחלקות הן:

$$\{\{\mathrm{id}\}, \{\sigma^2\}, \{\sigma, \sigma^3\}, \{\tau, \tau\sigma^2\}, \{\tau\sigma, \tau\sigma^2\}\}$$

הוכיחו.