הגדרה

תהי G חבורה, X קבוצה.

הגדרה (1): פעולה של G על X היא הומומורפיזם מ $G \to S_X$.

הגדרה (2): פעולה של G על X היא פונקציה $\psi: G \times X \to X$, כך שמתקיים:

$$\psi(1, x) = x$$

$$\psi\big(g, \psi(h, x)\big) = \psi(gh, x)$$

אם נקצר ונכתוב $g \cdot x$ במקום $\psi(g, x)$ נקבל:

$$1 \cdot x = x$$

$$g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$$

ההגדרות שקולות משום שאם נתונה פעולה $\psi: G \times X \to X$ אפשר להגדיר $\varphi: G \to S_X$ לפי:

$\big(\varphi(g)\big)(x) = \psi(g, x)$, ולהיפך.

דוגמאות

1. S_n פועלת על $\{1, \cdots, n\}$
   $D_n \leq S_n$ פועלת על $\{1, \cdots, n\}$
2. אם G פועלת על X, כל תת חבורה של G פועלת על X באותו אופן.
3. $GL_n(F)$ פועלת על F^n, ועל $F^n - \{0\}$.

פעולות יותר מסובכות

D_n פועלת על הקודקודים של מצולע בן n צלעות.

לכן, D_n פועלת גם על קבוצת הצלעות, האלכסונים, האלכסונים המכוונים, החלוקות של הקודקודים לשלות זרות.

הגדרה

תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X.

המסלול של $x \in X$:

$$orb_G(x) = G \cdot x = \{y | \exists g \in G: y = g \cdot x\}$$

איברים הם שקולים אם הם באותו מסלול. **המייצב** של $x \in X$:

$$G_x = stab_G(x) = \{g \in G | g \cdot x = x\} \leq G$$

למה

תהי G חבורה הפועלת על X.

לכל $x \in X$, $|G \cdot x| = [G: G_x]$.

הוכחה

$G/G_x = \{h \cdot G_x | h \in G\}$ – מרחב הקוסטים.

נוכיח $G/G_x \cong G \cdot x$ (איזומורפיזם של קבוצות).

אכן, אפשר להגדיר פונקציה:

$$G/G_x \to G \cdot x$$
$$hG_x \mapsto h \cdot x$$

זה מוגדר היטב, חד – חד ערכי ועל.

$$h' \in h \cdot G_x$$
$$h'G_x = hG_x$$

$\square$

מסקנה

הגודל של מסלול תמיד מחלק את סדר החבורה.

הגדרה

הפעולה של G על X היא פעולה נאמנה ($Faithful$) אם ההומומורפיזם $G \to S_X$ הוא שיכון.

במילים אחרות, אם $K = \ker(G \to S_x) = \{1\}$

הערה

אם G חבורה הפועלת על X ו - $K = \ker(G \to S_x)$ אז גם G/K פועלת על X ופעולה זו נאמנה.

משפט קיילי

כל חבורה סופית היא איזומורפית לתת חבורה של S_n לאיזשהו n.

הוכחה

G פועלת על עצמה על ידי כפל משמאל.

$$\varphi: G \to S_{|G|}, \qquad x \mapsto gx$$

וזו פעולה נאמנה.

$\square$

הוכחה מפורשת

נתונה G סופית.

נגדיר הומומורפיזם $G \to S_G$ ונוכיח שהוא חד חד ערכי. לכל g נגדיר:

$$l_g: X \to X, \qquad l_g(x) = gx$$

מתקיים:

$$\left(l_g \circ l_h\right)(x) = g\big(h(x)\big) = (gh)x = l_{gh}(x)$$

כעת,

$$l_1 = 1$$

ולכן,

$$l_g \circ l_{g^{-1}} = l_{g^{-1}} \circ l_g = l_1$$

בפרט, $l_g \in S_g$

ובנוסף הפונקציה:

$$G \to S_g, \qquad L(g) = l_g$$

היא הומומורפיזם. נניח $L(g) = 1$ אזי

$$g = g \cdot 1 = \big(L(g)\big)(1) = 1(1) = 1$$

$\square$

הערה

G פועלת על עצמה על ידי כפל משמאל.

G פועלת על עצמה על ידי הצמדה:

$$g \mapsto \left(\gamma_{g_{\in S_G}}: x \mapsto gxg^{-1}\right)$$

חישוב:

$$\begin{aligned}\left(\gamma_g \circ \gamma_h\right)(x) &= \gamma_g\big(\gamma_h(x)\big)\\ &= \gamma_g(hxh^{-1}) = g(hxh^{-1})g^{-1}\\ &= (gh)x(gh)^{-1} = \gamma_{gh}(x)\end{aligned}$$

לכן $\gamma_g \circ \gamma_{g^{-1}} = \gamma_1 = 1$ ומכאן ש – $\gamma_g \in S_G$, והפונקציה $\Gamma: g \mapsto \gamma_g$ היא הומומורפיזם:

$$\Gamma(gh) = \gamma_{gh} = \gamma_g \circ \gamma_h = \Gamma(g) \circ \Gamma(h)$$

המסלול של x תחת פעולת ההצמדה הוא $[x] = \{gxg^{-1} | g \in G\}$;

המייצב של x תחת פעולת ההצמדה הוא:

$$\{g \in G | gxg^{-1} = x\} = C_g(x) = \{g | gx = xg\}$$

הְמַרְכֵּז של x ב – G. לכן, $|[x]| = \left[G: C_g(x)\right]$.

דוגמא

G פועלת על אוסף תת החבורות על ידי הצמדה.

$$g: H \mapsto gHg^{-1}$$

המייצב של H תחת פעולת ההצמדה הוא:

$$N_G(H) = \{g | gHg^{-1} = H\}$$

המנרמל של H.

כמובן,

$$H \lhd N_G(H)$$

בפרט,

$$N_G(H) = G \quad \Leftrightarrow \quad H \lhd G$$

לפי הלמה היסודית, מספר תת החבורות של G הצמודות ל $- H$ שווה ל - $[G: N_G(H)]$.