סמסטר 2 - משפטים:

1. לכל $x\in R$, $0\cdot x=0$

2. אם e יחידה ימנית ו-e' יחידה שמאלית אז $e=e'$ וזהו איבר היחידה

3. הפיך $\Longleftrightarrow$ הפיך ימין + הפיך שמאל

4. $R^{\times}:=\{x\in R \mid x \text{ הפיך}\}$ היא חבורה ביחס לכפל

5. אם a הפיך שמאלי (ימין) אז a רגולרי שמאלי (ימין)

6. אם כל האיברים רגולריים שמאליים אז כולם רגולריים

7. אם $L\le_{\ell}R$ מכיל איבר הפיך שמאלי אז $L=R$ (כנ"ל עבור איבר הפיך ימני), בפרט אם $1_R\in L \Longleftrightarrow R=L$

8. יהי R חוג קומוטטיבי, ל-R אין אידאלים $(0,R\neq)$ $\Longleftrightarrow$ R שדה

9. לכל $a\in R$, $Ra=\{xa \mid x\in R\}$ תת-אידאל שמאלי (באופן דומה $a\cdot R$ אידאל ימני)

10. a רגולרי $\Longleftrightarrow$ a לא מחלק אפס

11. תהי $\{L_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ משפחה של אידאלים שמאליים. אז $\bigcap L_\lambda\le_{\ell}R$

12. תהי $\{L_\lambda\}$ משפחה של אידאלים שמאליים, $\sum L_\lambda=\{a_1+\dots+a_n \mid a_i\in L_{\lambda_i}, n\in\mathbb{N}\}=\bigcup_{\Lambda_0\subseteq\Lambda \text{ סופית}}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda_0}L_\lambda\right)$

13. לכל $L\le_{\ell}R$, $A\le_{r}R$ מתקיים $L\cdot A\lhd R$ (בפרט, אם $I,J\lhd R$ מתקיים $IJ\lhd R$, ובפרט, אם $I\lhd R$ מתקיים $I^n\lhd R$ לכל $n\in\mathbb{N}$).

14. יהיו $I,J\lhd R$. $I\cdot J\subseteq I\cap J\subseteq I,J\subseteq I+J$

15. לכל קבוצה $\{a_\lambda\}\subseteq R$, $\sum Ra_\lambda$ הוא האידאל השמאלי הקטן ביותר המכיל את כל ה-a_λ

16. האידאל הקטן ביותר המכיל את a הוא $RaR=\{x_1ay_1+\dots+x_nay_n\}$ (כאשר R קומ', Ra הוא אידאל דו-צדדי)

17. יהי R חוג, נניח ש-$S\subseteq R$ תת חוג ו-$I\lhd R$ אידאל, אז $S+I$ תת חוג

18. יהי $\varphi:R\longrightarrow S$ הומומורפיזם יחידה של חוגים עם יחידה

א. אם φ על, $\varphi(1_R)=1_S$

ב. אם S תחום, $\varphi(1_R)=1_S$

19. $\varphi:R\longrightarrow S$ הומומורפיזם, $(\ker\varphi=\{x\in R \mid \varphi(x)=0\}\subseteq R)$. $\ker\varphi\lhd R$ אידאל דו-צדדי!

20. משפט האיזומורפיזם הראשון: יהי $\varphi:R\longrightarrow S$ הומומורפיזם של חוגים, אז $R/\ker\varphi\cong \operatorname{Im}\varphi$ (כחוגים!)

21. משפט האיזומורפיזם השני: R חוג, $S\subseteq R$ תת חוג, $I\lhd R$, אז $S/_{I\cap S}\cong {}^{S+I}/_{I}$ $(I\cap S\lhd S,\ I\lhd S+I)$

Scanned by CamScanner

22. משפט האיזומורפיזם השלישי: $J, I \lhd R$, $I \subseteq J$. נקבל $J/I \lhd R/I$ ומתקיים: $(R/I)/(J/I) \lhd R/J$

23. משפט ההתאמה: $I \lhd R$. יש התאמה {אידיאלים של R המכילים את I} $\longleftrightarrow$ {אידיאלים של R/I}

24. חוג R אינו אפס יקרא פשוט אם אין לו תתי חוגים (עם יחידה $\neq 1_R$) $\Longleftrightarrow$ יש ל-R אידיאלים טריוויאליים בלבד (שהם החוג עצמו) $\neq 0,1$

25. אם Λ סופית, $\prod R_\lambda = \bigoplus R_\lambda$, אחרת, $\bigoplus R_\lambda$ תת חוג בלי יחידה

26. בחוג $M_n(R)$, מטריצות היחידה $\{e_{ij}\}$ הן מערכת של יחידות מטריציות

27. יהי S חוג, אז קיים R (תת חוג עם יחידה 1_S) כך ש $S = M_n(R)$ $\Longleftrightarrow$ יש ב-S מערכת של יחידות מטריציות

28. כל חוג בלי מטריצות מעל חוג קומוטטיבי עם יחידה הוא קבוצת חוג מטריצות $n\times n$

29. כל חוג מנה של חוג מטריצות הוא חוג מטריצות

30. יהי R חוג, מתקיים $Z(M_n(R)) = Z(R)\cdot I$ (מטריצות סקלריות עם סקלר מהמרכז)

31. יהי $A \lhd R$ אז $A\cdot M_n(R) = M_n(A) \lhd M_n(R)$ וכל אידיאל של $M_n(R)$ הוא כזה

32. $M_n(R)/M_n(A) \cong M_n(R/A)$

33. לכל שדה F מתקיים $End(F^n) \cong M_n(F)$ (ובאופן כללי, $M_n(R) \cong End(R^n)$:)

34. $(R[x])[y] \cong (R[y])[x] = R[x,y]$

35. $(M_n(R))[x] \cong M_n(R[x])$

36. R תחום $\Longleftrightarrow$ $R[x]$ תחום (אם R תחום, $U(R[x]) = U(R)$)

37. אם R תחום, $Char R$ הוא 0 או ראשוני (לדוגמא n = $Char\, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

38. המרכז של חוג עם חילוק הוא תמיד שדה

39. יש בדיוק שלוש אלגברות עם חילוק ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$

40. $\mathbb{H}$ הוא אלגברת חילוק

41. ניתן להציג את $\mathbb{H}$ כאוסף מטריצות: $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $ij = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

מכאן מתקבלות כללי הכפל של $\mathbb{H}$: $i^2 = -1$, $j^2 = -1$, $ji = -ij$ (מכאן ניתן לבנות את $\mathbb{H}$)

42. לכל $A \in M_2(\mathbb{C})$ מתקיים $A^2 + trace(A)\cdot A + det(A) = 0$ (לכן כל איבר של $\mathbb{H}$ מקיים פולינום ריבועי מעל $\mathbb{R}$)

43. $M \lhd R$ מקסימלי $\Longleftrightarrow$ ב-R/M אין אידיאלים לא טריוויאליים (אם R קומוטטיבי, R/M שדה)

44. הלמה של צורן: תהי X קבוצה סדורה חלקית שבה לכל שרשרת ($X_0 \subseteq X$) קיים ב-X חסם עליון. אז יש ל-X איבר מקסימלי.

45. לכל חוג יש אידיאל מקסימלי

46. תהי U קבוצה כלשהי. תהי $X \subseteq P(U)$ סגורה לאיחוד של שרשראות, אז ב-X יש איבר מקסימלי.

47. יהי R חוג עם יחידה, ויהי $I \lhd R$. אז יש אידיאל מקסימלי של R המכיל את I

48. לכל $z_0 \in X$ (X מ"ט), $M_{z_0} = \{f \mid f(z_0) = 0\} \lhd C(X)$ הוא אידיאל מקסימלי

49. נניח ש-X קומפקטי (מ"ט). כל אידיאל מקסימלי הוא מהצורה M_{z_0} לאיזשהו $z_0 \in X$.

50. R פשוט ⟺ $\{0\}$ מקסימלי

51. חוג קומוטטיבי פשוט ⟺ הוא שדה

52. כל חוג עם חילוק הוא פשוט (הפוך לא נכון) ⟺ אין לו אידיאלים חד-צדדיים

53. אם R פשוט, $M_n(R)$ גם פשוט

54. נניח ש-$I_1,\dots,I_n$ קו-מקסימליים בזוגות, אז $R/\cap I_i \cong R/I_1\times\dots\times R/I_n$ (מקרה פרטי $\mathbb{Z}$: אם $(n,m)=1$ מתקיים $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$)

55. אם $a,b\in\mathbb{Z}$, למערכת המשוואות $\begin{cases}x\equiv a(\mathrm{mod}\, n)\\ x\equiv b(\mathrm{mod}\, m)\end{cases}$ יש פתרון יחיד מודולו nm

56. נניח ש-I קו-מקסימלי ביחס ל-J וביחס ל-J', אז I קו-מקסימלי ביחס ל-JJ'

57. התכונות הבאות שקולות (עבור R קומוטטיבי):

א. R מקומי

ב. אוסף האיברים הלא הפיכים סגור לחיבור

ג. אם $x+y=1$ אז x או y הפיכים

58. שדה סדור הוא שלם קיום של סופרמום ⟺ הוא ארכימדי ושלם סדרתית

59. נניח ש-$F\subseteq K$, K ארכימדי ו-F שלם קיום של סופרמום אז $K=F$

60. אם $F\subseteq K$ ושניהם שלמים (קיום של סופרמום) הם שווים

61. אם $\mathbb{F}$ ארכימדי שלם, $\mathbb{F}=\mathbb{F}^*$ ($\Leftarrow \mathbb{F}^{**}=\mathbb{F}^*$ תמיד)

62. כל שדה ארכימדי $\mathbb{F}$ מקיים $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{F}\subseteq\mathbb{F}^*=\mathbb{Q}^*$ ($\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{F}\Rightarrow\mathbb{Q}^*\subseteq\mathbb{F}^*\Rightarrow\mathbb{Q}^*=\mathbb{F}^*$)

63. יש שדה סדור ארכימדי שלם יחיד (יהי $\mathbb{F}$ כזה, אז $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{F}\subseteq\mathbb{Q}^*\subseteq\mathbb{F}^*=\mathbb{F}$)

64. חוג קומוטטיבי הוא ראשוני ⟺ הוא תחום שלמות

65. כל תחום הוא ראשוני

66. R ראשוני ⟺ לכל $a,b\neq 0$, $aRb\neq\{0\}$ ($\exists t: atb\neq 0$)

67. כל חוג פשוט הוא ראשוני ($\Leftarrow$ כל שדה הוא תחום שלמות)

68. נניח ש-S הרחבה מרכזית של R. אם S פשוט, R ראשוני

69. $S=M_n(\mathbb{Q})$, $R=M_n(\mathbb{Z})$, ($Z(S)=\mathbb{Q}$), $R\cdot Z=S$ ($\Leftarrow M_n(\mathbb{Z})$ ראשוני, שאינו תחום)

70. התכונות הבאות שקולות עבור $P\lhd R$ (אידיאל ראשוני):

א. $AB\subseteq P\Rightarrow A\subseteq P$ או $B\subseteq P$

ב. $A\not\subseteq P$ וגם $B\not\subseteq P\Rightarrow AB\not\subseteq P$

ג. $P\subsetneq A$ ו-$P\subsetneq B\Rightarrow AB\not\subseteq P$

ד. $AB\subseteq P$, $P\subseteq B,A\Rightarrow A=P, B=P$

71. יהי R חוג, $P\lhd R$ אידיאל ראשוני ⟺ R/P חוג ראשוני

72. יהי R תחום שלמות, $P\triangleleft R$ ראשוני $\iff$ $(\forall a,b: a,b\notin P \rightarrow ab\notin P) \equiv (\forall a,b: (ab\in P \Rightarrow a\in P$ או $b\in P))$

73. אם R קומוטטיבי, מכפלת הפיכים היא הפיכה (אם $a,b\in Z(R)$: ab הפיך $\iff$ a,b הפיכים)

74. נניח ש- $T\subseteq R$ חוגים, $a\in R$. a הפיך ב-T אז a הפיך ב-R

75. R תת חוג של $S^{-1}R$, כי איברי S הפיכים ב-$S^{-1}R$, $S^{-1}\cdot R = S^{-1}R$

76. אם $P\triangleleft R$ ראשוני כך ש- $S\cap P=\emptyset$ אזי $S^{-1}P$ ראשוני

77. אם $P\triangleleft R$ ראשוני ו- $R\cap S=\emptyset$ אז $R\cap S^{-1}P=P$

78. אם $T\triangleleft S^{-1}R$ ראשוני אז $R\cap T\triangleleft R$ ראשוני

79. $P\triangleleft R$ ראשוני $\iff$ $R-P$ מונואיד (כפלית סגור)

80. לכל תחום שלמות R וראשוני $P\triangleleft R$, $R_P=(R-P)^{-1}R$ הוא תחום מקומי שהאידיאל המקסימלי היחיד שלו הוא $P_P=\{\frac{p}{s} / p\in P, s\notin P\}$

81. אם R תחום שלמות, $\{0\}\triangleleft R$ ראשוני ולכן $R_{\langle 0\rangle}=\{\frac{a}{b} / a\in R, b\neq 0\}=q(R)$ שדה (כל האיברים הפיכים). ואפשר R תת תחום שלו, שדה (הקטן ביותר) המכיל אותו

82. חוג R תחום שלמות $\iff$ R תת חוג של שדה

83. אם x הפיך ב-O_D, $x|1 \Rightarrow N(x)|N(1)=1 \Rightarrow N(x)=\pm1$

84. יהי $D>0$ (מספר חסר ריבועים). נניח ש- $a+b\sqrt{D}\in O_D$ הפיך אז אם $a,b\in\mathbb{Z}$ מקבלים $a=\pm1, b=0$ או $a=0, b=\pm1, D=-1$
אם $a,b\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$, מקבלים $D=-3$, $b=\pm\frac{1}{2}$, $a=\pm\frac{1}{2}$. כאשר $D<0$, $U(O_D)\cong\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

85. יהי $a\in R$ אי פריק ונניח ש- $a=xy$, אם x אי הפיך אז $\langle x\rangle=R$ או $a\sim x$ (כלומר $\langle x\rangle=\langle a\rangle$)
לכן a אי פריק $\iff$ $\langle a\rangle$ מקסימלי בקבוצת האידיאלים הראשיים

86. p איבר ראשוני $\iff$ $\langle p\rangle$ אידיאל ראשוני

87. איבר ראשוני $\Rightarrow$ אי פריק

88. נתרי $\Rightarrow$ ACCP $\Rightarrow$ אטומי

89. התכונות הבאות שקולות לתחום שלמות R:
א. R נתרי
ב. כל אידיאל של R נוצר סופית
ג. (עקרון המקסימום:) לכל קבוצה $\neq\emptyset$ של אידיאלים של R יש איבר מקסימלי

90. מנה של חוג נתרי הוא חוג נתרי

91. הבסיס של הילברט: אם R חוג נתרי, אז $R[x]$ נתרי ($\Leftarrow$ כל חוג נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$ (או $\mathbb{Z}$) הוא נתרי)

92. כל חוג קומוטטיבי נוצר סופית (מעל $\mathbb{Z}$ או מעל שדה) הוא נתרי

93. יהי R תחו"ש נניח $a=p_1\cdots p_n=\pi_1\cdots\pi_m$ כאשר π_i פריקים, p_i ראשוניים. אז $n=m$ וה-π_j שווים ל-p_i עד כדי סדר

94. תחו"ש R הוא תפ"י $\iff$ האטומי וכל אי פריק הוא ראשוני (תפ"י $\Leftarrow$ ACCP)

95. ראשי $\Rightarrow$ נתרי + תפ"י.

96. תכונת בזו ⟸ כל אי פריק הוא ראשוני

97. כל תחום ראשי הוא תפ"י.

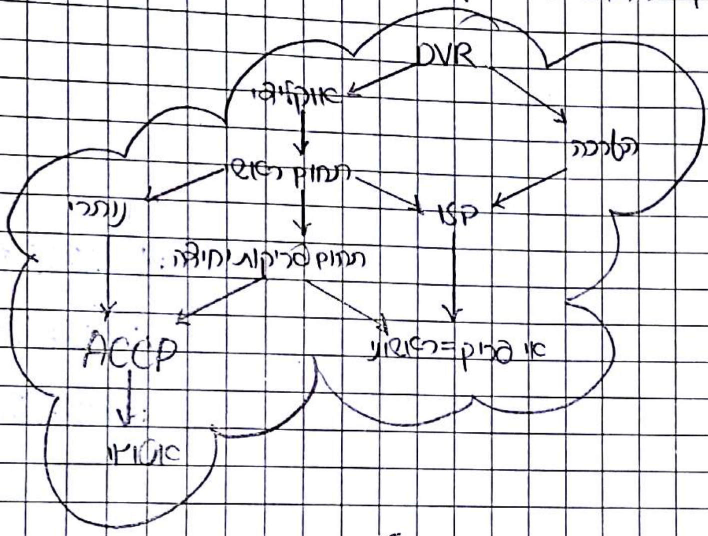
98. כל תחום אוקלידי הוא ראשי

99. התחומים O_D, $D<0$, ראשיים $\iff D=-1,-2,-3,-7,-11,-19,-43,-67,-163$ (O_D אוקלידי עבור $D=-1,\pm2,\pm3,5,-7,-11,13$)

100. כל ראשוני של $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ מחלק ראשוני של $\mathbb{Z}$

101. יהי $p\neq2$, יש פתרון למשוואה $x^2\equiv-1\pmod p \iff p\equiv1\pmod 4$

102. n ניתן להצגה כצורה $a^2+b^2 \iff$ כל גורם ראשוני $p|n$ כך ש $p\equiv3\pmod 4$ מופיע בחזקה זוגית.



103. כל O_D הוא תחום לא הערכה.

104. כל תחום הערכה מקיים את תכונת בזו.

105. התכונות הבאות שקולות לתחום שלמות R:

א. R תחום הערכה

ב. קיים $\mathbb{F}$ עם הערכה כך ש- $R=O_v$

ג. האידיאלים של R סדורים לינארית

ד. האידיאלים הראשיים של R סדורים לינארית

106. $DVR=$ תחום הערכה + ראשי = הערכה + נותרי (ראשי = נותרי + בזו + הערכה ⟸ בזו)

107. כל DVR הוא אוקלידי.

108. יהי R תחום שלמות ו- p ראשוני כך ש- $\bigcap_{n=0}^{\infty}p^nR=0$ ומקיים $\mathbb{F}=q(R)$. נגדיר הערכה $v_p:\mathbb{F}^\times\to\mathbb{Z}$ ע"י $v_p(p^n\cdot\frac{a}{b})=n$

כאשר a,b, $p\nmid a,b$, $n\in\mathbb{Z}$. אז O_{v_p} הוא DVR. המיקום של R בראשוני R_p הוא O_{v_p}

109. יהי $\mathbb{F}$ שדה עם הערכה $v:\mathbb{F}^\times\to\mathbb{Z}$ (כך ש O_v DVR). נגדיר $d(\alpha,\beta)=e^{-v(\alpha-\beta)}$. נותן (אולטרה) מטריקה.

110. O_v קומפקטי $\iff$ $\mathbb{F}$ שלם $\iff$ ($\sum a_n$ מתכנס אם"ם $v(a_n)\longrightarrow\infty$) $\iff$ (כל טור $\sum\alpha_np^n$ כאשר $\alpha_n\in O_v$ מתכנס)

111. כל שדה עם הערכה קומפקטית (קומפקטי) אוסף של טורים (מודולו שלם)

112. כל איבר מהצורה $1+xf$ עבור $f\in k[[x]]$ הוא הפיך ב- $k[[x]]$

113. נגדיר הערכה $v(\sum_{i=N}^{\infty}a_ix^i)=N$ (חוג ההערכה הוא $k[[x]]$). אז $k((x))$ שלם ביחס למטריקה המושרית ע"י v.

114. לכל שדה $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}[x]$ הוא אוקלידי ולכן ראשי.

Scanned by CamScanner

115. יהי R תחום ראשי ו-$a\in R$. נפרק את a לגורמים אי פריקים: $a\sim\prod p_i^{n_i}$ אזי: $R/\langle a\rangle \cong \prod R/\langle p_i^{n_i}\rangle$

116. האידיאלים של $R/\langle p^n\rangle$ כאשר R תחום ראשי ו-p אי פריק, הם: $\langle p^i\rangle/\langle p^n\rangle$

117. יהי F שדה, f פולינום מדרגה n, אזי $F[x]/\langle f\rangle$ מרחב וקטורי מעל F ממימד n עם בסיס: $1+\langle f\rangle, x+\langle f\rangle,\dots,x^{n-1}+\langle f\rangle$.

118. יהי F שדה ו-$f(x)\in F[x]$ אזי $f(a)=0 \iff (x-a)\mid f(x)$. (a נקרא שורש של f)

119. מסקנה: מספר השורשים של f מעל F אינו עולה על $\deg f=n$

120. יהי F שדה ו-$f\in F[x]$ פולינום אי פריק מעל F. אזי קיים שדה הרחבה $K\supseteq F$ שבו יש ל-f שורש. (ומתקיים $[K:F]=\deg f$)

121. f אי פריק ויש לו שורש ב-F $\iff \deg f=1$

122. יהי F שדה ו-$f\in F[x]$ פולינום כלשהו. אזי יש הרחבה K שבה יש שורש של f.

123. יהי F שדה ו-$f\in F[x]$, אזי קיימת הרחבה של F המפצלת את f

124. R תח"י, $F=q(R)$. יהי פולינום $f\in R[x]\subseteq F[x]$ (f אי פריק מעל F) אינו גורר (f אי פריק מעל R)

125. קריטריון אייזנשטיין: יהי R תח"י, $f(x)=a_nx^n+\dots+a_0\in R[x]$, ונניח שקיים $M\triangleleft R$ ראשוני כך ש- $a_n\notin M$, $a_{n-1},\dots,a_0\in M$, $a_0\notin M^2$ אזי f אי פריק מעל F (מקרה פרטי - קיים p ראשוני כך ש- $p\nmid a_n$, $p\mid a_0,\dots,a_{n-1}$, $p^2\nmid a_0$)

126. כל $f\in R[x]$ ניתן להצגה בצורה $f=a\cdot f_1$ כאשר $a\in R$, $f_1\in R[x]$ פרימיטיבי (הצגה יחידה: $a\sim c(f)$)

127. כל $f\in F[x]$ $(q(R)=F)$ ניתן להצגה $f=\alpha f_1$ כאשר $\alpha\in F$, $f_1\in R[x]$ פרימיטיבי.

128. יהי R תח"י, $a,b\in R$ ו-$p_1,\dots,p_t$ אי פריקים, ו- $0\le \alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n\in\mathbb{Z}$ כך ש- $a=\prod p_i^{\alpha_i}$, $b=\prod p_i^{\beta_i}$ אזי $(a,b)=\prod p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}$

129. הלמה של גאוס 1: אם $f,g\in R[x]$ פרימיטיביים אזי fg פרימיטיבי.

130. הלמה של גאוס 2: יהיו $f,g\in R[x]$ אזי $c(f\cdot g)=c(f)\cdot c(g)$

131. הלמה של גאוס 3: יהי R תח"י ויהי $f\in R[x]$, אם f אי פריק מעל R אז f אי פריק מעל F $(=q(R))$

132. R תח"י ו-$f\in R[x]$. f אי פריק מעל R $\iff$ f פרימיטיבי ו-f אי פריק מעל F

133. יהי R תח"י אזי $R[x]$ גם תח"י. ($\Leftarrow$ $F[x_1,\dots,x_n]$ ו- $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ תח"י)

134. העתקה $R\times M\to M$ מגדירה מבנה של מודול M מעל R $\iff$ $R\to End(M)$, $\alpha\mapsto(x\mapsto\alpha x)$ הומומורפיזם חוגים.

135. משפט האיזומורפיזם הראשון: אם $\varphi:M\to N$ הומומורפיזם של מודולים, $M/\ker\varphi\cong Im\,\varphi$

136. משפט האיזומורפיזם השני: $N,K\le M$ תתי מודולים של M. $N+K/K\cong N/N\cap K$

137. משפט האיזומורפיזם השלישי: $K\le N\le M \Rightarrow (M/K)/(N/K)\cong M/N$

138. אם M סכום ישר פנימי של $A,B\le M$ אזי $M\cong A\oplus B$

139. $e_i=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ אזי $\{e_1,\dots,e_n\}$ בסיס ל-R^n

140. כל מודול על R הוא חופשי $\iff$ R חוג עם חילוק

141. כל מודול חופשי נוצר סופית איזומורפי ל-R^n עבור n כלשהו.

142. יהי R תחום ראשי, F מודול חופשי, N תת מודול של F, אזי N חופשי ו- $Rank\,F\ge Rank\,N$ (תח"י הוא ראשי $\Leftarrow$ כל תת מודול של מודול חופשי הוא חופשי)

143. כל מודול (נוצר סופית) חסר פיתול מעל R תחום ראשי הוא חופשי. (נוצר סופית)

144. יהי תחום ראשי R, כל מודול נוצר סופית הוא מהצורה $M_A = R^n/AR^n$ כאשר $A\in M_n(R)$ (נקראת מטריצת ההצגה של M)

145. אם $A\sim B$ אז $M_A\cong M_B$ (ההפך לא נכון)

146. R תחום ראשי. כל מטריצה $A\in M_n(R)$ שקולה למטריצה קנונית

147. מודול M הוא ציקלי ⟺ קיים $y\in M$ כך ש-$M=Ry$ ⟺ קיים אפימורפיזם $\varphi:R\to M$ כך ש-$\alpha\mapsto\alpha y$

148. כל מודול נוצר סופית מעל תחום ראשי R הוא סכום ישר של מודולים ציקליים $M\cong\bigoplus_{i=1}^{t} R/d_iR$ קיימים ויחידים $d_1|\dots|d_t$ ש-$1\neq$

149. אם V מ"ו נ"ס, T ה"ל אז V הוא מודול נוצר סופית מעל $\mathbb{F}[x]$ בהינתן T.

150. נסמן V_T מודול מעל $\mathbb{F}[x]$ (עם $f\cdot v$). אם B בסיס ל-V ונסמן $A=[T]_B$ אז $V_T\cong\mathbb{F}^n_A$

151. $\mathbb{F}^n_A\cong\mathbb{F}^n_B \iff B,A$ דומות (קיימת P הפיכה כך ש-$A=PBP^{-1}$)

152. מודול ציקלי $\mathbb{F}[x]/\langle f(x)\rangle$ כאשר $f(x)=x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\dots+c_0$, $M\cong\mathbb{F}^n_{C_f}$ כאשר $C_f=\begin{pmatrix}0 & & c_0\\ 1 & \ddots & \vdots\\ & 1 & -c_{n-1}\end{pmatrix}$ (המטריצה המלווה של $f(x)$)

153. יש התאמה חח"ע ועל בין מודולים $\mathbb{F}^n$ ומודולים מעל $\mathbb{F}[x]$ למחלקות הדמיון ב-$M_n(\mathbb{F})$

154. מטריצת ההצגה של $\mathbb{F}^n_A$ היא $xI-A$ כלומר $\mathbb{F}^n_A\cong\mathbb{F}[x]^n/(xI-A)\mathbb{F}[x]^n=M_{(xI-A)}$

155. כל מטריצה דומה למטריצת בלוקים של מטריצות מלוות. צורה זו נקראת "הצורה הרציונלית הקנונית" והיא יחידה.

156. $\mathbb{F}^n_A\cong\mathbb{F}^n_B \iff A,B$ דומות $\iff xI-A,\ xI-B$ שקולות $\iff$ אותה צורה אלכסונית קנונית $\iff$ אותם גורמים אינווריאנטים $\iff$ אותה צורה רציונלית קנונית

157. הפולינומים האינווריאנטים של A הם הגורמים האינווריאנטים: $d_1(x),\dots,d_n(x)$

158. הפולינום המינימלי של A הוא הגורם האינווריאנטי האחרון: $d_n(x)$

159. $\mathbb{F}^n_A\cong\mathbb{F}[x]/p_1(x)^{\alpha_1}\oplus\dots\oplus\mathbb{F}[x]/p_t(x)^{\alpha_t}$ כאשר p_i אי פריקים (לא בהכרח שונים) ו-α_i חזקות שלמות.

לצורה קנונית יחידה. במקרה זה הבלוקים הם בלוקי ז'ורדן: $J(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & \\ & \ddots & \\ & & \alpha\end{pmatrix}$ (צורת ז'ורדן!!)

160. כל מטריצה מעל שדה סגור אלגברית דומה לסכום בלוקי ז'ורדן, נקראת צורת ז'ורדן, והיא קנונית יחידה.