תרגול 4 אינפי 3

14 בינואר 2015

הגדרה:

סדרה $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ במרחב מטרי X נקראת סדרת קושית אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_ε כך שלכל $m,n > N_\varepsilon$, $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.

סדרה מתכנסת היא סדרת קושי.

מרחב נקרא **שלם** אם סדרה מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי.

מרחב נקרא **מרחב בנך** אם הוא מרחב נורמי שלם לפי המטריקה המושרית מהנורמה.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו לפי ההגדרה כי הסדרה $a_n = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n})$ היא סדרת קושי לפי ההגדרה.

<u>פתרון:</u>

יהיו m,n ונחשב:

$$||a_n - a_m|| = \sqrt{2}\cdot(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}) < \sqrt{2}\cdot(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m})$$

יהי $\varepsilon > 0$, צ"ל $||a_n - a_m|| < \varepsilon$. מספיק להבטיח שמתקיים:

$$\sqrt{2}\cdot(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}) < \varepsilon$$

ומספיק שיתקיים: $\sqrt{2}\frac{1}{2^n}, \sqrt{2}\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$, ולכן נדרוש:

$$m,n > log_2(\frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon})$$

ואם נבחר: $N_\varepsilon = max\{1, log_2(\frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon})\}$ הוא יקיים את הדרוש.

<u>תזכורת:</u>

תהי $f: X \to Y$ פונקציה, ותהיינה $A \subseteq X, B \subseteq Y$.

התמונה של A היא הקבוצה: $f(A) = \{f(a) | a \in A\}$.

התמונה ההפוכה של B היא הקבוצה $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$.

הגדרה:

נאמר שפונקציה היא רציפה אם תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה.

באופן שקול, נאמר שפונקציה היא רציפה אם מקור של קבוצה סגורה היא קבוצה סגורה.

*פולינומים, פונקציות מעריכיות, טריגונומטריות וכו' הן רציפות, כמו שראינו באינפי 1...

תרגיל:

הראו שכל מישור ב$-\mathbb{R}^3$ הוא קבוצה סגורה.

פתרון:

משוואת מישור היא $ax + by + cz + d = 0$. נתבונן בפונקציה $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$. זו פונקציה רציפה (פולינום) ומתקיים:

$$f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y, z)|ax + by + cz + d = 0\}$$

שזהו המישור שלנו. $\{0\}$ סגורה, f רציפה ולכן גם המישור הוא סגור.

הגדרה:

נגדיר רציפות במרחבים מטריים: תהי $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$. נאמר ש$-f$ רציפה ב$-X \ni a$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $d_1(x, a) < \delta$ אז $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

לגבי פונקציות סקלריות ממשיות, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, נאמר ש$-f$ רציפה ב$-a$ אם: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. הגבול הוא לכל מסלול שנבחר ב$\mathbb{R}^n$.

תרגיל:

האם הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

רציפה?

פתרון:

ברור שהפונקציה רציפה בכל נקודה שאינה $(0, 0)$.

בנקודה $(0, 0)$ הגבול לא קיים, כי אם נתבונן במסלולים $y = ax$, נקבל:

$$\lim_{x \to 0} f(x, ax) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x^3 + a^3x^3}{x^2 + a^2x^2} = \frac{1}{1 + a^2}$$

כלומר הגבול משתנה בהתאם ל$-a$ ולכן הוא לא קיים, ולכן f אינה רציפה בנקודה $(0, 0)$.

תרגיל:

האם ניתן להגדיר את $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{sin(x^2+y^2)}$ כרציפה ב$-(0, 0)$?

פתרון:

כן. נסמן: $t=x^2+y^2$ ואז:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = lim\frac{x^2+y^2}{sin(x^2+y^2)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{sint} = 1$$

ולכן כדי לקבל רציפות נגדיר: $f(0,0)=1$.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-2y}{2x-3y}$.

במסלול $y=0$ נקבל $\frac{3}{2}$ ובמסלול $x=0$ נקבל $\frac{2}{3}$ ולכן הגבול אינו קיים.

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xsin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

$limx=0$, $lim\frac{sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1$ ולכן בסה"כ הגבול הוא 0.

3. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{4x+y-z}{2x-5y+2z}$.

במסלול $x=y=0$ נקבל $-\frac{1}{2}$ ובמסלול $x=z=0$ נקבל $-\frac{1}{5}$ ולכן הגבול אינו קיים.

4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-|x-y|}{x^2-2xy-y^2}}$.

נסמן: $t=x-y$, ואז:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-|x-y|}{x^2-2xy-y^2}} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{-|t|}{t^2}} = 0$$

5. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^4+y^4+z^2}$.

במסלול $x=0$ נקבל 0.

במסלול $x=y, z=x^2$ נקבל $\frac{1}{3}$ ולכן הגבול אינו קיים.

6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|x|+|y|}cos\frac{1}{y^2}$.

לפי סנדוויץ':

$$0 \le |\frac{x^2}{|x|+|y|}cos\frac{1}{y^2}| \le |\frac{x^2}{|x|+|y|}| \le |\frac{x^2}{|x|}| = |x| \to 0$$

ולכן הגבול הוא 0.

<u>תרגיל:</u>

האם הפונקציות הבאות רציפות?

1. $f(x,y)=\begin{cases} arctan\frac{x^2+1}{x^2+(y-1)^2} & (x,y)\neq(0,1) \\ \frac{\pi}{2} & (0,1) \end{cases}$.

בכל נקודה שאינה $(0,1)$ הפונקציה רציפה כהרכבת רציפות. בנקודה $(0,1)$ נקבל:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \lim_{z\to\infty} arctanz = \frac{\pi}{2}$$

ולכן הפונקציה רציפה.

2. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (0,0) \end{cases}$.

במסלול $x=y$ נקבל $\lim\limits_{x\to0} f(x,x)=1$ ולכן לא רציפה בנקודה $(0,0)$. בכל נקודה אחרת הפונקציה רציפה.

3. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$.

לפי סנדוויץ':

$$0\le\left|\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^3}{x^2}\right|+\left|\frac{xy^2}{y^2}\right|=|x|+|x|\to0$$

ולכן הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$. שימו לב: $x^2+y^2\neq0$ זהה במשמעותו ל-$(x,y)\neq(0,0)$. בכל נקודה אחרת הפונקציה רציפה כמנת רציפות.