בס"ד

פתרון תרגיל 2 (חדו"א 2)

1) א. צ"ל: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x)$ מתכנס במ"ש ב $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

פתרון: נבנה סכום חלקי: $S_n(x) = (1-x) + x(1-x) + \dots + x^{n-1}(1-x)$

$$= 1 - x + x - x^2 + \dots + x^{n-1} - x^n$$

$$= 1 - x^n$$

עבור $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$: $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1$

ולכן הטור מתכנס בקטע זה.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}} |1 - x^n - 1|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

ולכן הטור מתכנס במ"ש בקטע $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

ב. צ"ל: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$ מתכנס במ"ש ב $\mathbb{R}$.

פתרון: נעזר במבחן ויירשטראס: $\left|\frac{\cos nx}{n^4}\right| \le \frac{1}{n^4}$, וידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ מתכנס, ולכן הטור הנתון מתכנס במ"ש ב $\mathbb{R}$.

ג. צ"ל: הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n^2} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)$ מתכנס במ"ש ב $[-1,1]$.

פתרון: $S_n(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$

בתחום שלנו: $S_n(x) \longrightarrow x$ ולכן הטור מתכנס.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{-1\le x\le 1} |S_n(x) - S(x)|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{-1\le x\le 1}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right|\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 0$$

ולכן הטור הנתון מתכנס במ"ש ב $[-1,1]$.

ד. צ"ל: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{n}}$ מתכנס במ"ש ב $[-1,1]$.

פתרון: נעזר במבחן ויירשטראס:

לכל $x \in [-1,1]$: $\left|\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{n}}\right| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{n}} \le \frac{1}{(2n+1)\sqrt{n}}$

$$< \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1\frac{1}{2}}}$$

וידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1\frac{1}{2}}}$ מתכנס, ולכן הטור הנתון מתכנס במ"ש ב $[-1,1]$.

2) א.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a+nd)x^n = a\sum_{n=0}^{\infty}x^n + d\sum_{n=0}^{\infty}nx^n = \frac{a}{1-x} + dx\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$= \frac{a}{1-x} + dx\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)' = \frac{a}{1-x} + dx\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'$$

$$= \frac{a}{1-x} + dx\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{a}{1-x} + dx\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$$

קיבלנו כי עבור $R=1$, כלומר $|x|<1$ הטור מתכנס ל- $f(x)=\frac{a}{1-x}+\frac{dx}{(1-x)^2}$.

$x=\frac{1}{2}$ נמצא בתחום ההתכנסות ולכן נוכל להציב: $x=\frac{1}{2}$, $a=3$, $d=4$

ולקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3+4n)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} + \frac{4\cdot\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 14$$

ב.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\int x^{2n}\,dx = \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\right)dx = \int\frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c$$

ע"י הצבת $x=0$ בטור ובפונק', נקבל $c=0$.

קיבלנו כי עבור $R=1$, כלומר $|x|<1$ הטור מתכנס ל- $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

$x=\frac{1}{2}$ נמצא בתחום ההתכנסות ולכן נוכל להציב $x=\frac{1}{2}$ ולקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln 3$$

$$\Leftarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)} = \ln 3$$

3) נשים לב כי:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(3x)^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)\cdot 3^{n+1}x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}(x^{n+2})'}{n!}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}x^{n+2}}{n!}\right)'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}x^{n+2}}{n!} = 3x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nx^n}{n!} = 3x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!} = 3x^2e^{3x}$$

לכן, הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}x^{n+2}}{n!}$ מתכנס עם רדיוס התכנסות ∞.

לפי משפט גזירה איבר איבר, לפי x:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(3x)^{n+1}}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}x^{n+2}}{n!}\right)' = (3x^2e^{3x})' = 6xe^{3x} + 9x^2e^{3x}$$

רדיוס ההתכנסות: $R=\infty$.

המשך

4) א. $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)(2n+3)}{2n(2n+1)}\right|=1$

ב. נבצע גזירה איבר-איבר של הטור $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$ בתחום ההתכנסות.

ונקבל $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n}$ נבצע גזירה נוספת ונקבל:

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+1}=-x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$=-x\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{-x}{1+x^2}$$

ע"י אינטגרציה נקבל $f'(x)=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$.

נציב $x=0$ בטור שקיבלנו עבור $f'(x)$ ונקבל $f'(0)=0$, ולכן $c=0$.

ולכן $f'(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}\ln(1\frac{1}{4})$.

5) א. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n x^{n-1}}{4^n}$ $\Leftarrow$ $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{4^n}\cdot\frac{4^{n+1}}{(n+1)}\right|=4$

ב. נבצע אינטגרציה איבר-איבר של הטור בתחום ההתכנסות:

$$\int f(x)dx=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{4^n}=C-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-x}{4}\right)^n=C-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{4}\right)^n-1\right)$$

$$=C+1-\frac{1}{1+\frac{x}{4}}=C+\frac{1+\frac{x}{4}-1}{1+\frac{x}{4}}=C+\frac{x}{4+x}$$

לכן $f(x)=\left(\frac{x}{4+x}\right)'=\frac{4}{(4+x)^2}$

מכאן $f(1)=\frac{4}{(4+1)^2}=\frac{4}{25}$. (ניתן להציב $x=1$ מאחר שנמצא בתחום ההתכנסות...)

המשך

6) א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 2^n}$, כלומר $a_n = \frac{1}{n^2 \cdot 2^n}$.

לפי דלמבר: $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{n^2 \cdot 2^n} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 2$

עבור $x=2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\Leftarrow$ מתכנס.

עבור $x=-2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ $\Leftarrow$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

ולכן תחום ההתכנסות הוא $[-2,2]$.

ב. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k \cdot 3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)3^{k+1}}$, כלומר $a_k = \frac{1}{(k+1)3^{k+1}}$

לפי דלמבר: $R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+2)(3^{k+2})}{(k+1)(3^{k+1})} \right| = 3$

עבור $x=3$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k}$ $\Leftarrow$ מתבדר.

עבור $x=-3$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k}$ $\Leftarrow$ טור לייבניץ ולכן מתכנס בתנאי.

לכן, תחום ההתכנסות הוא $[-3,3)$. הטור מתכנס בהחלט ב $(-3,3)$ ובתנאי בנק' $x=-3$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} n^a (x-x_0)^n$, כלומר $a_n = n^a$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^a = 1$, ולכן לפי נוסחת קושי-הדמר $R=1$.

ונקבל התכנסות עבור $|x-x_0|<1$, כלו' $x_0-1 < x < x_0+1$.

עבור $x = x_0+1$: $\sum_{n=1}^{\infty} n^a$ $\Leftarrow$ מתכנס בהחלט עבור $a<-1$ ומתבדר אחרת.

עבור $x = x_0-1$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^a$ $\Leftarrow$ מתכנס בהחלט עבור $a<-1$,

מתכנס בתנאי עבור $-1 \le a < 0$,

מתבדר עבור $a \ge 0$.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-a)^n$. כלומר $a_n = n!$.

$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

ולכן הטור מתכנס עבור $x-a=0$. כלו' שהתחום היחיד עבורו הטור מתכנס הוא $x=a$.

ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$ כלומר $a_n = \frac{n}{2^n(3n-1)}$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{n}{2^n(3n-1)} \cdot \frac{2^{n+1}(3n+2)}{n+1}\right| = \left|\frac{2\cdot n(3n+2)}{(n+1)(3n-1)}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 2$$

לכן הטור מתכנס עבור $|x-1|<2$, כלומר עבור $-1<x<3$

עבור $x=3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$

האיבר הכללי מקיים: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$, ולכן הטור מתבדר.

עבור $x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n-1}$ $\Leftarrow$ מתבדר מאותה סיבה.

ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}(x-x_0)^n$, כלומר $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{n!}{(2n)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)}\right| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

לכן $R=\infty$ לפי דלמבר, ותחום ההתכנסות הוא $\mathbb{R}$.

ז) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+m}{n} x^n$, כלומר $a_n = \binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$

לפי דלמבר:
$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+m)!}{n!m!} \cdot \frac{(n+1)!m!}{(n+m+1)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n+m+1} = 1$$

8) נחשב: $\int_0^{\frac{1}{2}} x\ln(1+x^3)\,dx$ עם שגיאה של 10^{-2} לכל היותר.

ראינו בתרגול כי $\ln(1+t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}t^k}{k}$ לכל $t\in(-1,1)$.

$$\Longrightarrow x\ln(1+x^3)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{x^{3k+1}}{k}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x\ln(1+x^3)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{x^{3k+1}}{k}\right)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}(-1)^{k+1}\frac{x^{3k+1}}{k}\,dx$$

הטור מתכנס במ"ש בכל קטע סגור ב $(-1,1)$.

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{3k+2}}{k(3k+2)}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2}}{k(3k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2^{3k+2}k(3k+2)}$$

הטור מתכנס בהחלט, לפי מבחן ההשוואה עם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$.

מטרה: לחשב את סכום הטור בדיוק של עד 10^{-2}. נשים לב כי הטור הוא טור לייבניץ, ולכן: $|r_n|\le|a_{n+1}|$

במקרה שלנו: $|r_1|\le|a_2|=\left|(-1)^3\cdot\frac{1}{2^8\cdot2\cdot8}\right|<\frac{1}{100}$

ולכן מספיק לחשב את סכום האיבר הראשון, ונקבל:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x\ln(1+x^3)\,dx\approx a_1=\frac{1}{2^5\cdot5}$$

9) נוכיח כי לכל $x\in\mathbb{R}$: $\int_0^x e^{-t^2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

נשתמש בפיתוח טיילור עבור e^x: $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

$$\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^n}{n!}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}\,dt\right)$$

רדיוס ההתכנסות של טור החזקות הזה אינסוף, ולכן הוא מתכנס במ"ש בכל קטע, וניתן להחליף את סדר האינטגרל והסכום.

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$