

# אלגברה לינארית 2 | תשפ"א מועד א'

פתרון המבחן | יונתן סמידוברסקי

## שאלה 1

(סעיף א)

$A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  כך שכל רכיביה ממשיים, וכן  $A^4 = -A^2$ ,  $\text{rank}(A) = 3$ .  
 כעת נובע  $\dim(N(A)) = 5 - 3 = 2$ , ניתן לכתוב גם  $\dim(N(A - 0I)) = 2$  כלומר 0 הוא ערך עצמי של  $A$   
 בעל ריבוי גיאומטרי 2, כעת מהנתון השני  $A^4 - A^2 = 0$  כלומר,  $A^2(A^2 + I) = A^2 * (A - iI) * (A + iI) = 0$   
 בעצם קיבלנו שישנו פולינום מאפס למטריצה  $A$  כך  $p(x) = x^2 * (x - i) * (x + i)$  וממשפט הפולינום המינימלי מחלק אותו.  
 קיבלנו כי לא יכולים להיות ערכים עצמיים נוספים. אבל ידוע ש  $\text{trace}$  הינו סכום הע"ע.  
 כלומר, יש לנו כמה אפשרויות,  
 משום ש  $\text{tr}$  ממשי, סכום הערכים העצמיים כולל הריבויים הוא ממשי.

$$p_A(x) \in \{x^3(x - i)(x + i), x^5\}$$

### מקרה 1

הפולינום האופייני הוא  $p_A(x) = x^3 * (x - i) * (x + i)$   
 והפולינום המינימלי  $m_A(x)$  מחלק את  $p(x) = x^2 * (x - i) * (x + i)$  ולכן נחלק למקרים

מקרה א1:  $m_A(x) = x^2 * (x - i) * (x + i)$

מקרה ב1:  $m_A(x) = x * (x - i) * (x + i)$

נכתוב את צורות הז'ורדן במקרים אלה (אם אפשר):

### מקרה א1

ע"ע/תכונה	ריבוי אלגברי	ריבוי גיאומטרי	חזקה בפולינום המינימלי
0	3	2	2
i	1	?	1
-i	1	?	1

סך הכל

$$J(A) = J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(i) \oplus J_1(-i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

אבל במקרה ב'1, מקבלים שהחזקה בפ"מ היא 1, הריבוי האלגברי הוא 3, הריבוי הגיאומטרי הוא 2. כלומר, 2 בלוקים, שהגודל מביניהם הוא בגודל 1, והע"ע 0 מופיע 3 פעמים וזו סתירה.

## מקרה 2

נתון

$$A^4 = -A^2$$

נכפול את שני הצדדים ב  $A$  ולפי קיילי-המילטון:

$$0 = A^5 = -A^3$$

ובעצם  $-x^3$  מאפס את המטריצה ולכן  $m_A(x) \in \{x, x^2, x^3\}$

ערך עצמי/תכונה	ריבוי אלגברי	ריבוי גיאומטרי	חזקה בפולינום המינימלי
0	5	2	?

אבל שני בלוקים מגודל מקסימלי של 1 או 2 לא יכולים להגיע לסכום סדרים של 5, סך הכל  $m_A(x) = x^3$  אבל מהנתון  $m_A(x) | x^2(x^2 + 1)$  בסתירה. וקיבלנו שצורת ז'ורדן היחידה היא

$$J(A) = J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(i) \oplus J_1(-i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

## (סעיף ב)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ממשפט מהרצאה, מטריצה  $B$  לכסינה  $\iff$  הריבוי האלגברי והגיאומטרי שלה זהים לכל ערך עצמי. בעזרת שימוש בפיתוח לפי לפלס (פעם לפי שורה ופעם לפי עמודה), נקבל שהפולינום האופייני הינו

$$\begin{aligned}
p_A(x) = \det & \left( \begin{array}{cccccccccccc}
x-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & x-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-5 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-6
\end{array} \right) = \\
& = (x-1)^2 * (x-2)^2 * (x-3)^2 * (x-4)^2 (x-5)^2 (x-6)^2
\end{aligned}$$

כעת, קל לוודא שלכל  $\lambda \in \sigma(A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  מתקיים  $\dim(N(A - \lambda I)) = 2$ , ולכן הריבוי האלגברי והגיאומטרי שווים לכל ע"ע  $B \Leftarrow$  לכסינה.

(ישנן דרכים נוספות עם הפולינום המינימלי או חלוקה לבלוקים שלא הצגתי).

## שאלה 2

### (סעיף א)

יהי  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ממ"פ עם המכפלה הפנימית  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B)$ .  
תהי  $T : V \rightarrow V$  המוגדרת ע"י:  $T(A) = A^t$ , נוכיח  $T$  צמודה לעצמה, כלומר  $T^* = T$ .  
תהי  $T^*$  ההעתקה הצמודה, כעת מתקיים מההגדרה

$$\langle T(A), B \rangle = \langle A, T^*(B) \rangle$$

$$\text{tr}(T(A)^t * B) = \text{tr}(A^t T^*(B))$$

$$\text{tr}(A^{tt} * B) = \text{tr}(A^t * T^*(B))$$

$$\text{tr}(A * B) = \text{tr}(A^t * T^*(B))$$

אבל

$$\text{tr}(A * B) = \text{tr}((AB)^t) = \text{tr}(B^t * A)$$

נציב לקבלת

$$\text{tr}(B^t * A^t) = \text{tr}(A^t * T^*(B))$$

[טענה מלינאריות 1:  $\text{tr}(BA) = \text{tr}(AB)$ ]

וסיימנו.

כעת מקבלים

$$\text{tr}(B^t A^t) = \text{tr}(A^t * B^t)$$

$$\text{tr}(A^t * B^t) = \text{tr}(A^t * T^*(B))$$

$$\langle A, B^t \rangle = \langle A, T^*(B) \rangle$$

$$\langle A, T(B) \rangle - \langle A, T^*(B) \rangle = 0$$

$$\langle A, (T - T^*)(B) \rangle = 0$$

אבל זה מתקיים לכל  $A, B$  ובפרט ל  $A = (T - T^*)(B)$ . כלומר,

$$\langle (T - T^*)(B), (T - T^*)(B) \rangle = 0$$

ומאי שליליות

$$(T - T^*)(B) = 0$$

לכל  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ולכן

$$T = T^*$$

**(סעיף ב)**

יהי

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לעת

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נלכסן את המטריצה, ראשית קל לחשב שהבסיסים למרחבים העצמיים הם:  
 עבור  $V_1$ :  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ , ניתן להסתכל על הבסיס גם כ-  $\left\{ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$   
 עבור  $V_{-1}$ :  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$   
 ואז מפעילים גראם-שמידט על הבסיס

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

והאיברים הראשונים  $A_1, A_2$  לא ישתנו מכיוון שהם גם ככה מאונכים, וקל לחשב שגם הרביעי מאונך לשלושתם.

$$A'_1 = A_1$$

$$A'_2 = A_2$$

$$A'_3 = A_3 - \frac{\langle A_3, A_2 \rangle}{\|A_2\|^2} * A_2 - \frac{\langle A_3, A_1 \rangle}{\|A_1\|^2} * A_1 = 0.25 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A'_4 = A_4$$

כעת הבסיס

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

מחישוב מקבלים שההעתקה לפי בסיס זה הינה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### (סעיף ג)

צריך להוכיח כי  $T$  אוניטרית, ניעזר בסעיפים ב' וג' במשפט מההרצאה האומר כי  $T$  אוניטרית אם ורק אם  $[T]_B$  אוניטרית עם הבסיס האורתונורמלי שמצאנו. צ"ל:

$$TT^* = T^*T = Id$$

אבל מסעיף א' נובע ש

$$TT^* = T^*T$$

ומסעיף ב'

$$[T]_B * [T^*]_B = [T]_B * [T]_B^* = [T]_B * \overline{[T]_B^t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = I$$

וסיימנו.

### שאלה 3

#### (סעיף א)

יהי  $V$  מ"מ"פ  $W_1, W_2$  ת"מ שלו כך ש  $V = W_1 \oplus W_2$   
צ"ל:  $V = W_1^\perp \oplus W_2^\perp$   
באמצעות הכלה ושיוויון מימדים. ההכלה ברורה (בתוך מרחב מכפלה פנימית) ונותר שיוויון מימדים,  
כעת נסיים עם שיוויון מימדים. ניעזר במשפט המימדים

$$\dim(W_1^\perp \oplus W_2^\perp) = \dim(W_1^\perp) + \dim(W_2^\perp) + \dim(W_1^\perp \cap W_2^\perp) =$$

נשים לב כי  $\dim(W_1^\perp \cap W_2^\perp) = 0$  מטענת עזר

$$(\dim(V) - \dim(W_1)) + (\dim(V) - \dim(W_2)) = 2\dim(V) - (\dim(W_1) + \dim(W_2)) = \dim(V)$$

#### (טענת עזר)

טענת עזר  $W_1^\perp \cap W_2^\perp = \{0\}$   
הוכחה (ההכלה בכיוון אחד ברורה), נוכיח את הכיוון השני.  
יהי  $v \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$   
וכן יהיו  $v_1 \in W_1, v_2 \in W_2$   
ומההגדרה מתקיים

$$\langle v_1, v \rangle = \langle v_2, v \rangle = 0$$

כעת, לכל  $v' \in V$  (משום ש  $V = W_1 \oplus W_2$ ) מתקיים:

$$\langle v, v' \rangle = 0$$

וניקח בפרט  $v' = v$  ונקבל

$$\langle v, v \rangle = 0$$

ומאי שליליות  $v = 0$ .