תרגילים אופציונליים לתרגיל 1 אינפי 3 תשע"ח

1. א"ש קושי שוורץ: יהי V מרחב מכפלה פנימית, אזי לכל $u, v \in V$ מתקיים:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

כאשר הנורמה היא הנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית. הוכיחו שבמרחבים נורמיים בהם הנורמה מושרית ממכפלה פנימית, אי-שוויון המשולש נובע מאי-שוויון קושי-שוורץ.

2. הוכיחו את "אי-שוויון המשולש השני" במרחב נורמי:

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u \pm v\|$$

3. יהיו X, Y מרחבים נורמיים. מי מהפונקציות הבאות היא נורמה על $X \times Y$? הסבירו. החיבור והכפל מוגדרים איבר-איבר.

(א) $\|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

(ב) $\|(x,y)\|_2 = \|x\|_X \cdot \|y\|_Y$.

(ג) $\|(x,y)\|_3 = \max\left\{\|x\|_X, \|y\|_Y\right\}$.

4. הוכיחו שאם מרחב נורמי $(V, \|\|)$ מעל $\mathbb{R}$ מקיים את שוויון המקבילית, אזי הפונקציה:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

היא המכפלה הפנימית מעל V המשרה את הנורמה.
הדרכה:
יש להוכיח את אקסיומות המכפלה הפנימית ושאכן $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.
הדבר היחיד שאינו מיידי הוא הליניאריות ברכיב הראשון. הוכיחו בשלבים: קודם חיבוריות ואז כפליות.

5. האם הקבוצות הבאות ב-$\mathbb{R}^2$ פתוחות? סגורות? לפי משפט היינה-בורל, קבוצה ב-$\mathbb{R}^n$ היא **קומפקטית** אם היא סגורה וחסומה. קבעו האם הקבוצות A, B, C הן קומפקטיות.

(א) $A = \{(x,y) \,|x = y\}$.

(ב) $B = \{(x,y) \,|x > 0, y < 0, x + y > -1\}$.

(ג) $C = \left\{(x,y) \,|x^2 + y^2 < 1\right\} \cup \{(0,1)\}$.

6. תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, הוכיחו או הפריכו:

(א) $cl\,(A \cap B) \subseteq cl\,(A) \cap cl\,(B)$.

(ב) $cl\left(A\cap B\right)\supseteq cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)$.

(ג) $int\left(A\cup B\right)\subseteq int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$.

(ד) $int\left(A\cup B\right)\supseteq int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$.

7. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ בת-מניה. הראו ש: $int\left(A\right)=\emptyset$.

8. תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קשירות. הוכיחו או הפריכו:

(א) $int\left(A\right)$ קשירה.

(ב) אם $A\cap B\neq\emptyset$ אז $int\left(A\cup B\right)$ קשירה.