

1.

$$\begin{vmatrix} l-4c & f & 2l+f \\ m-4a & d & 2m+d \\ n-4b & e & 2n+e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l-4c & f & 2l \\ m-4a & d & 2m \\ n-4b & e & 2n \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} l-4c & f & l \\ m-4a & d & m \\ n-4b & e & n \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -4c & f & l \\ -4a & d & m \\ -4b & e & n \end{vmatrix} = .a$$

$$= -8 \begin{vmatrix} c & f & l \\ a & d & m \\ b & e & n \end{vmatrix} = -8(-1)^2 \begin{vmatrix} a & d & m \\ b & e & n \\ c & f & l \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & l \end{vmatrix} = -16$$

b. אם איברי המטריצה שלמים, אזי גם הדטרמיננטה שלה שלמה (הרי היא סכום של מכפלות של שלמים). באופן דומה, גם הדטרמיננטה של ההופכית הינה שלמה.

$$1 = |I| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$$

$$(\pm 1)^{2000} = 1 \text{ ומתקיים תמיד ש } |A| = \pm 1$$

2. נתון $S:U \rightarrow V$, $T:V \rightarrow U$ ו- $TS:U \rightarrow U$ הינה העתקת הזהות (שהיא בפרט חח"ע).

נניח בשלילה ש S אינה חח"ע. לכן קיימים $u_1, u_2 \in U$ כך ש $u_1 \neq u_2$ אבל $S(u_1) = S(u_2)$.

אבל אז גם $u_1 = TS(u_1) = TS(u_2) = u_2$ בסתירה. לכן S חח"ע.

לפי משפט S חח"ע אם"ם הגרעין שלה הוא אפס. לכן לפי משפט הדרגה

$$\dim U = \dim \text{Im } S + \dim \text{Ker } S = 0 + \dim \text{Im } S$$

$$\dim \text{Im } S \leq \dim V \text{ ולכן } \dim \text{Im } S = \dim U \text{ וביחד קיבלנו את המשל.}$$

3.

a. קל לראות ש $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ומכיוון שוקטורים אלה בלתי תלויים, מימד

הגרעין הינו לפחות 2. אם מימד הגרעין היה שלוש, סימן שזו העתקת האפס, ולכן המטריצות חייבות להיות שוות בסתירה לנתון. (מטריצה שמרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית שלה הוא כל המרחב היא בהכרח מטריצת האפס).

לכן סה"כ מימד הגרעין הינו 2.

b. מימד התמונה לפי משפט הדרגה הינו $3 - 2 = 1$

$$c. A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ולכן $[T] = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. כמו כן, $T(x, y, z) = [T] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-3y \\ 5x-3y \\ 6x-3y \end{pmatrix}$ (זה נכון)

כי זו מטריצה המייצגת את ההעתקה לפי הקואורדינאטות הסטנדרטיות)