חשבון אינפיניטסמלי לפיסיקאים

מבחן מועד א סמסטר תשמ"ז 30.01.2007

מרצים: סרגיי קוסטיוקובסקי ולאוניד קגן

זמן המבחן שלוש שעות.
ענה על שאלה מס' 1 ועל עוד שלוש שאלות בלבד.
כל שאלה 25 נקודות .
חומר עזר: דף נוסחאות.
הוכח את תשובותיך.

1. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א) אם $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ אז $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ רציפה במ"ש ב- $[a,b]$.

ב) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ אז $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

ג) אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ד) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ רציפה במ"ש ב- $(0,\infty)$.

ה) אם $f'(x)>g'(x)$ ב- $[a,b]$ אז $f(x)>g(x)$ ב- $[a,b]$.

2. א) אם פונקציה מקיימת $|f(x)|\le \sin^2 x$ אז היא גזירה ב- 0.

ב) בדוק התכנסות של הטורים הבאים: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

3. א) נתונה פונקציה אינטגרבילית $f(x)\ge 0$ כך ש- $\int_0^{\infty} f(x)dx$ מתכנס. האם $\int_0^{\infty} f^2(x)dx$ מתכנס?

האם התשובה משתנה אם נתון שהפונקציה רציפה? – נמק (בונוס 5 נק').

ב) נגדיר סידרה: $a_1\in[0,1]$, $a_{n+1}=\sin(a_n)$. האם הסדרה מתכנסת ואם כן אז לאיזה גבול?

4. נתונה פונקציה $f(x)>0$ גזירה. נגדיר פונקציה $f(x)$ רציפה

$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$. האם $g(x)$ גזירה ב- 0?

5. א) (13 נק') הוכח: אם פונקציה $f(x)$ גזירה ולא לינארית ב- $[a,b]$ אז קיימים $x_1,x_2\in[a,b]$ כך ש- $f'(x_1)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(x_2)$.

ב) (6 נק') חשב $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

ג) (6 נק') חשב $\int_{-4}^{4}x^5\sin^2 x\,dx$.

בהצלחה!

3

מחברת מס׳ ____
מתוך ____ מחברות

אוניברסיטת תל-אביב TEL AVIV UNIVERSITY

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)
לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

תאריך הבחינה 30.01.2007

שם הקורס אינפי לביולוגים

שם המורה סרגי קוסטיוקובסקי

החוג/המגמה ביולוגיה

מס׳ זיהוי
(העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)

038797411 3

לשימוש המורה הבוחן:

הציון 100
המחברת נבדקה ביום ____
חתימת המורה ____

102783

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים. 25

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום. 21
3. אין להחזיק **טלפונים ניידים** או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחק ממקום מושבו. 29
4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה. 25
5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשגיח.
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמשגיח. בעת יציאה מן החדר, יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המשגיח.
7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למשגיח את המחברת **ואת השאלון**, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב בלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וציונו יהיה "0".
8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.
9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשגיח את התעודה המזהה.
11. **אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.**

בהצלחה.

שאלה 1

א. אם $f(x)$ רציפה ב $[a,b]$ אז $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ רציפה במידה שווה ב $[a,b]$. הטענה נכונה

אם $f(x)$ רציפה ב $[a,b]$ אז היא אינטגרבילית (אינטגרל אמיתי) ב- $[a,b]$.

בקטע $[a,b]$ מתקיים $F'(x)=f(x)$ ($f(x)$ רציפה $\Leftarrow$ $F(x)$ גזירה)

$f(x)$ רציפה ב $[a,b]$ לכן היא חסומה (משפט ויירשטרס - פונ' רציפה בקטע סגור - חסומה). קיים $M>0$ כך שלכל x בקטע $[a,b]$ $|F'(x)|=|f(x)|<M$.

משפט: אם הנגזרת של פונ' חסומה בקטע $[a,b]$ אז היא רציפה במידה שווה בקטע. $\Leftarrow$ $F'(x)$ חסומה $\Leftarrow$ $F(x)$ רציפה במ"ש ב $[a,b]$

ב. אם $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ אז לכל $\varepsilon>0$ קיים N_1 כך שלכל $n>N_1$ מתקיים $|a_n-a|<\varepsilon$.

צריך להוכיח שלכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שאם $n>N$ מתקיים $||a_n|-|a||<\varepsilon$

$$\underbrace{||a_n|-|a|| \le}_{\text{אי שוויון המשולש}} \underbrace{|a_n-a|<\varepsilon}_{\text{עבור } n>N_1} \implies \underbrace{||a_n|-|a||<\varepsilon}_{\text{לכל } n>N_1}$$

הטענה נכונה: מתקיים $\lim|a_n|=|a|$

ג. הטענה לא נכונה.

נגדיר $a_n=1$ לכל n. $\lim_{n\to\infty} a_n=1$ $S_N=\sum_{n=1}^{N} a_n=N$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} n=\infty$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

שאלה 1 ד'.

הטענה נכונה.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\underset{[\frac{0}{0}]}{\overset{L}{=}}\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0 \Leftarrow$$ פונ' חסומה חלקי פונ' מונוטונית עולה ולא חסומה

~~לכל $\varepsilon>0$ קיים M כך שאם $x>M$ $\left|\frac{\sin x}{x}\right|<\varepsilon$~~

~~נבדוק בקטע $[0, M+1)$ - בקטע זה הפונ' רציפה במידה שווה:~~

משפט: פונ' רציפה במידה שווה בקטע (a,b) אם ורק אם $\lim_{x\to a^+}f(x)$ $\lim_{x\to b^-}f(x)$ קיימים וסופיים

והפונ' רציפה לכל $x\in(a,b)$.

לא סותר!!

$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ רציפה לכל $x\neq 0$ (מנה של פונ' רציפות ← רציפה אם הפונ' במכנה שונה מ-0).

ע"פ המשפט הפונ' $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ רציפה במ"ש בקטע $(0,+\infty)$

שאלה 1 ה'

הטענה לא נכונה. נגדיר $f(x)=x$ $g(x)=2x-100$

ונבדוק בקטע $[0,1]$. הפונ' רציפות וגזירות בקטע)

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1 \\ g(x)=2x-100 \Rightarrow g'(x)=2 \end{array}\right\} \quad f'(x)<g'(x)$$

נגדיר פונ' $h(x)=f(x)-g(x)$

$$h(x)=x-2x+100=100-x$$

לכל $x\in[0,1]$ מתקיים $h(x)>0$

לכן בקטע $f(x)>g(x)$ (ובכל רואים כי $f'(x)<g'(x)$)

שאלה 2

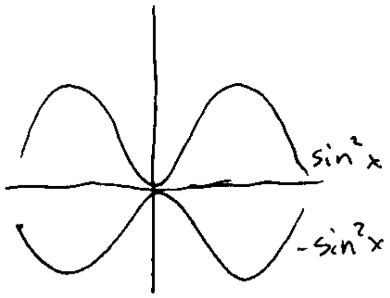
א. ~~[illegible]~~

$|f(x)| \le \sin^2(x)$ $\qquad$ $\sin^2 x \ge f(x) \ge -\sin^2 x$

נגדיר $g(x) = \sin^2(x)$ $\qquad$ $g(0) = \sin^2(0) = 0 \ge |f(x)| \Rightarrow f(0) = 0$

הפונ' $f(x)$ גזירה ב- $x=0$ אם קיים (וסופי) הגבול:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$$



בתנאי שהגבולות קיימים

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \sin x \frac{\sin x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \sin x \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0$$

13

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} -\sin x \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0$$

נתון $|f(x)| \le \sin^2 x$ לכן מתקיים $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \left|\frac{\sin^2 x}{x}\right|$

$$0 = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2 x}{x} \le \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \le \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$$

$$\Downarrow$$

לפי משפט הסנדוויץ' מתקיים: $\quad f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

הגבול קיים, ולכן הנגזרת של הפונ' $f(x)$ ב $x=0$ קיימת.

ב

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \qquad a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} = \left(\frac{n!}{2^n}\right)^2 > 0$$

$(2^n)^2 = 2^{2n} \ne 2^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\cdot 3 \cdots n}{\cancel{2}^n}\right)^2 \ge \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left((1.5)^2\right)^{n-1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} 2.25^{n-1} = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

2

הטור מתבדר: תנאי הכרחי להתכנסות טור חיובי ← האיבר הכללי שואף ל-0.

המשך שאלה 2

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \underset{n>1}{>} 0$$

$$a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$$

עבור $n \geq 3$ מתקיים

$\ln n > 1 \Rightarrow (\ln n)^{\frac{1}{n}} < (\ln n)$

לכל n מתקיים
$n > \ln n$

6

מתקבל שלכל $n \geq 3$ מתקיים $a_n \geq \frac{1}{n}$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר. לפי מבחן ההשוואה הראשון לטורים חיוביים: אם $\underbrace{a_n \geq b_n \geq 0}_{\text{מתקיים מהמקום מסוים בסדרה}}$ אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

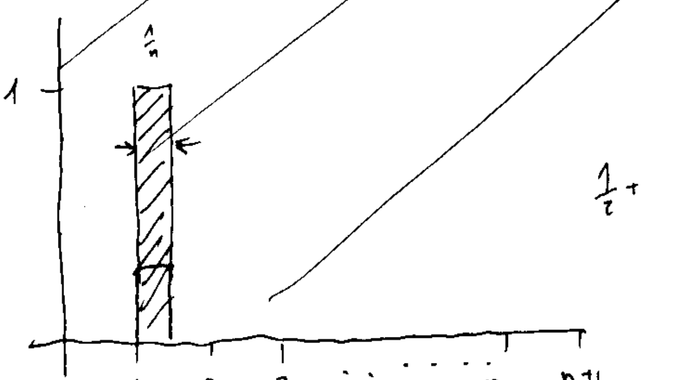
$\Leftarrow$ הטור $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ מתבדר.

שאלה 3

$\int_0^{\infty} f(x)dx$ מתכנס $\Leftarrow$ לא גורר ש $\int_0^{\infty} f^2(x)dx$ מתכנס

נגדיר כך $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{[x]} & x \in \left[[x], [x] + \frac{1}{[x]}\right] \end{cases}$$



בדיקה שהפונ' $g(x)$ רציפה ב- $x=0$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x t f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x f(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$f(t)$ רציפה ⇐ אינטגרבילית, הפונ' במונה ובמכנה גזירות בסביבה של 0 - לכן ניתן להפעיל את כלל לופיטל.

שאלה 4

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x t f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} & \\ 0 & x=0\end{cases}$$

בדיקה ש $g(x)$ רציפה
ב $x=0$ בעמ' מימין.

$g(x)$ גזירה ב-0 אם ~~...~~ קיים הגבול (ואם $g(x)$ רציפה ב $x=0$).

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t f(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}$$

~~משפט: אם $h(x)$ $f(x)$ רציפות ב $[a,b]$ ו $f(x)\neq 0$ בקטע אז קיים $c\in[a,b]$ כך ש $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b h(x)dx$~~
~~נגדיר $h(x)=t$ נתון $f(x)>0 \Rightarrow f(x)\neq 0$. נתון $f(x)$ גזירה לכן היא רציפה.~~

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t f(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x f(x)}{\int_0^x f(t)dt+x f(x)}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+x f'(x)}{f(x)+f(x)+x f'(x)}$$

$tf(t)$, $f(t)$ גזירות ורציפות,
לכן ניתן להפעיל את כלל לופיטל
עבור המצב $\left[\frac{0}{0}\right]$

* $f(x)$ רציפה וחיובית נגדיר $f(0)=C_1$ $\quad \infty>C_1>0$
* $f'(x)$ קיימת ולכן $f'(0)=C_2$

~~$\lim_{x\to 0}\frac{C_1+0\cdot f'(0)}{\ldots}$~~

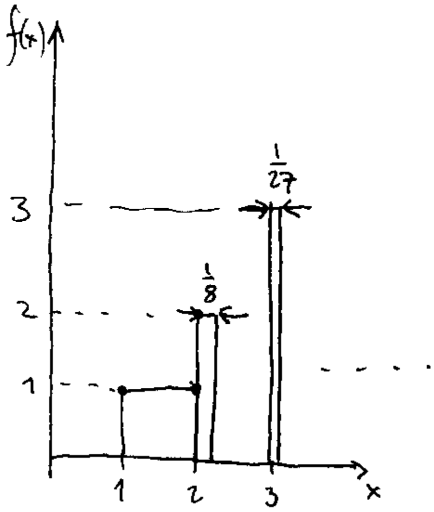
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+xf'(x)}{2f(x)+xf'(x)}=\frac{C_1+0\cdot C_2}{2C_1+0\cdot C_2}=\frac{1}{2}$$

הנגזרת רציפה לכן אפשר
"להציב" את הערך שלה ב $x=0$
לתוך הגבול

$$\boxed{g(x) \text{ רציפה ב } x=0 \text{ ומתקיים } g'(0)=\tfrac{1}{2}}$$

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

נגדיר פונ' f(x) אינטגרבילית ולא רציפה.



מסוג

$$f(x)=\begin{cases} [x] & \{x \mid x\in[[x],[x]+\frac{1}{[x]^3}] \cap x\geq 1 \cap x\neq 2\} \\ 0 & \{x \mid x\notin[[x],[x]+\frac{1}{[x]^3}] \cap x\neq 2\} \\ 1 & \{x \mid x=2\} \end{cases}$$

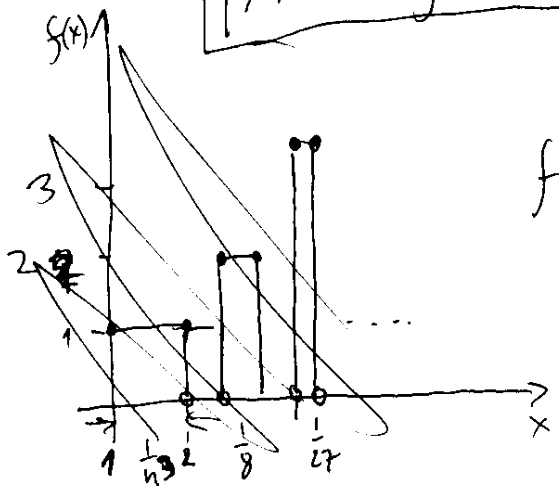
"[x]" הכוונה לערך השלם של X

הפונ' f(x) מוגדרת חד-חד ערכית לכל x≠2
נגדיר f(2)=1 ⇐
פונ' מוגדרת לכל X
ואינטגרבילית רימן בכל קטע
סגור.

$$f^2(x)=\begin{cases} [x]^2 & \{x \mid x\in[[x],[x]+\frac{1}{[x]^3}] \cap x\geq 1 \cap x\neq 2\} \\ 0 & \{x \mid x\notin[[x],[x]+\frac{1}{[x^3]}] \cap x\neq 2\} \\ 1 & \{x \mid x=2\} \end{cases}$$

שאלה 3

$\boxed{\text{הגדרה מסודרת של הפונ' בעמ' מימין}}$



$$f(x)=\begin{cases}[x] & x\in\left[[x],[x]+\frac{1}{[x]^3}\right] \quad x\geq 1\\ 0 & x\notin\left[[x],[x]+\frac{1}{[x]^3}\right]\end{cases}$$

הפונ' מוגדרת לכל $x\geq 0$

$$\int_0^\infty f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\left(\int_1^\infty f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\dots+\int_n^{n+1}f(x)dx\right)$$

$$\int_n^{n+1} f(x)dx=n\cdot\frac{1}{n^3}=\frac{1}{n^2}$$

$$\int_0^\infty f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\int_0^\infty f(x)dx=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ מתכנס ($\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס לכל $\alpha>1$) $\Leftarrow$ $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס

$\boxed{\text{הגדרה מסודרת בעמ' מימין}}$

$$f^2(x)=\begin{cases}[x]^2 & x\in\left[[x],[x]+\frac{1}{[x]^3}\right]\cap x\geq 1\\ 0 & x\notin\left[[x],[x]+\frac{1}{[x]^3}\right]\end{cases}$$

$$\int_0^\infty f^2(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\dots+\int_n^{n+1}f(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}$ מתבדר (טור הרמוני) $\Leftarrow$ $\int_0^\infty f^2(x)$ מתבדר.

מסקנה: אם $\int_0^\infty f(x)$ מתכנס, $\int_0^\infty f^2(x)$ לא בהכרח מתכנס.

סעיף ב (שאלה 3)

נראה באינדוקציה שהסדרה a_n חסומה $0 \le a_n \le 1$ לכל n

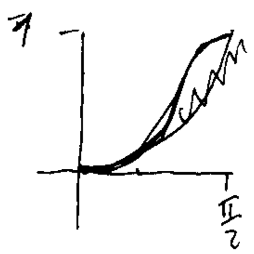
$a_1 \in [0,1]$ נתון:

נניח ש $a_n \in [0,1]$ ונראה ש $a_{n+1} \in [0,1]$

$a_{n+1} = \sin a_n \Rightarrow \sin a_n \le 1$

לכל מס' ממשי

הנחת האינדוקציה $\sin a_n \ge 0 \Leftarrow 0 \le a_n \le 1 < \frac{\pi}{2}$



$\sin x \ge 0$ לכל $\frac{\pi}{2} \ge x \ge 0$

קיבלנו שלכל n מתקיים $1 \ge a_n \ge 0$.

נראה באינדוקציה ש-a_n מונוטונית יורדת.

לכל $\frac{\pi}{2} \ge x \ge 0$ מתקיים $x \ge \sin x$

$a_2 \le a_1 \Leftarrow a_2 = \sin a_1 \le a_1$

נניח שמתקיים $a_n \le a_{n-1}$ ונראה כי $a_{n+1} \le a_n$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = \sin a_n \\ a_n = \sin a_{n-1} \end{array}\right\} \sin a_n \overset{?}{\le} \sin a_{n-1}$$

בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ $\sin$ הי' פונ' עולה, לכן אם ורק אם

$\frac{\pi}{2} \ge x > y \ge 0$ אז $\sin x > \sin y$

$\sin a_n \le \sin a_{n-1} \Leftrightarrow a_n \le a_{n-1}$

$\Downarrow$

הנחת האינדוקציה.

קיבלנו שהסדרה a_n מונוטונית יורדת במובן החלש.

משפט: אם סדרה מונוטונית יורדת וחסומה אז יש לה גבול.

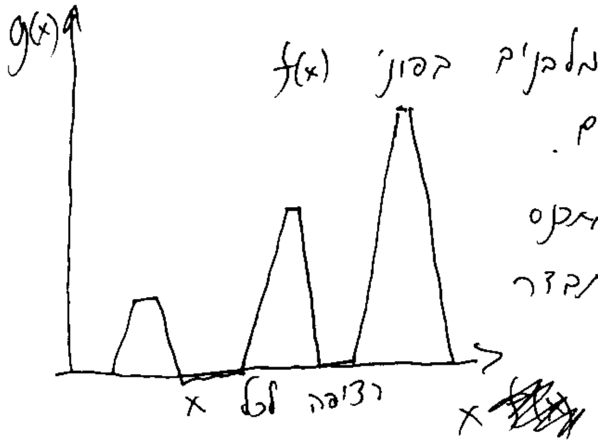
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$

המשך סעיף ב בעמ' מאחורה

המשך סעיף א' שאלה 3

גם אם הפונ' רציפה "יתכן ש $\int^{\infty} f(x)dx$ מתכנס אבל $\int^{\infty} f^2(x)dx$ מתבדר.

מגדירים פונ' דומה לפונ' המלבנים $f(x)$ אבל במקום מלבנים משתמשים בטרפז. ניתן להגדיר את הפונ' כך ששטחי הטרפזים שווים לשטחי המלבנים בפונ' $f(x)$ ולכן האינטגרלים של 2 הפונ' שווים.



לכן, כש $f(x)$ מתכנס $\Leftarrow$ $g(x)$ מתכנס

כש $f^2(x)$ מתבדר $\Leftarrow$ $g^2(x)$ מתבדר

סעיף 4 ב

$a_{n+1}=\sin a_n \qquad a_1\in[0,1]$

לכל $0\le x\le \frac{\pi}{2}$ מתקיים $0\le \sin x\le x$

נבצע באינדוקציה שהסדרה a_n מונוטונית יורדת ([illegible] החלק)

$n=2$: $1\ge a_1\ge a_2=\sin a_1 \Rightarrow a_2\le a_1$

נניח שמתקיים $1\ge a_n\ge a_{n-1}$ נראה שמתקיים $a_{n+1}\le a_n$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1}=\sin a_n \\ a_n=\sin a_{n-1}\end{array}\right\} \Rightarrow \sin a_n \overset{?}{\le} \sin a_{n-1}$$

המשך סעיף ב

נטען: $a_{n+1}=\sin a_n$ לכן מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sin a_n$

sin פונ' רציפה לכן $\lim_{n\to\infty}\sin a_n=\sin\lim_{n\to\infty} a_n$

$\alpha=\sin\alpha \Rightarrow \alpha=0$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n=0}$$

$$|a-b| = |a+(-b)|$$

$a<0 \quad b<0$

$$||a|-|b|| < ||a|+|b||$$

אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב