

**בחינת סיום (מועד ב') בקורס**  
**מבנים אלגבריים להנדסה (83218)**  
 מרצה: ד"ר נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

נא לענות על 4 מתוך 5 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 5 נקודות וסעיפים ב' וג' שווים 10 נקודות כל אחד.

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1

- א. הגדר: איבר יוצר של חבורה.  
 ב. תהי  $(G, \cdot)$  חבורה בת  $n$  איברים, ויהי  $g_1$  יוצר של  $G$ . הוכח כי  $o(g_1) = n$ .  
 ג. תהי  $(G, \cdot)$  חבורה, ויהיו  $g_1, g_2 \in G$  יוצרים של  $G$ . האם  $g_1 \cdot g_2$  הוא בהכרח יוצר של  $G$ ? הוכח או תן דוגמא נגדית.

שאלה 2

- א. הגדר: הומומורפיזם של חבורות.  
 ב. תהי  $G = (C - \{0\}, \cdot)$  (המרוכבים ללא אפס עם פעולת הכפל הרגילה) ותהי  $T = \{x + iy \in C : x^2 + y^2 = 1\}$  (מעגל היחידה במישור המרוכב). הוכח כי  $T$  היא תת חבורה של  $G$ .  
 ג. הוכח כי  $G/T \cong (R_+, \cdot)$ . (הסימון  $\cong$  פירושו "איזומורפי", ו- $R_+$  היא קבוצת הממשיים החיוביים).

שאלה 3

- א. הגדר: תת חבורה נורמלית.  
 ב. תהי  $(G, \cdot)$  חבורה בת  $n$  איברים, ותהי  $H$  תת חבורה של  $G$  עם  $n/2$  איברים. הוכח כי  $H$  תת חבורה נורמלית של  $G$ .  
 ג. תהי  $(G, \cdot)$  חבורה בת  $n$  איברים, ותהי  $H$  תת חבורה של  $G$  עם  $n/3$  איברים. האם  $H$  בהכרח תת חבורה נורמלית של  $G$ ? הוכח או תן דוגמא נגדית.

שאלה 4

- א. הגדר: אלגוריתם אוקלידס למציאת מחלק משותף גדול ביותר (gcd) של שני פולינומים.  
 ב. מצא את המחלק המשותף הגדול ביותר של הפולינומים  $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + 1$  ו-  
 $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$  מעל שדה המספרים  $Z_2$ , והצג אותו כצירוף שלהם.  
 ג. פתור את המשוואה  $23x = 12 \pmod{200}$ .

שאלה 5

- א. הגדר: אידאל בחוג קומוטטיבי.  
 ב. יהי  $p(x)$  פולינום אי-פריק מעל  $R$ . הוכח כי הקבוצה  $\{g \in R[x] : p|g\}$  (כלומר, קבוצת כל הפולינומים שמתחלקים ב  $p(x)$ ) הינה אידאל בחוג  $R[x]$ .  
 ג. יהי  $F$  שדה סופי עם 27 איברים. האם קיים  $x \in F$  כך ש  $o(x) = 9$ ? תן דוגמא, או הוכח שאין איבר כזה. (כזכור, סדר של איבר בשדה הוא ביחס לפעולת החיבור של השדה.)