מבנים דיסקרטיים – תרגיל בית 6 - פתרון

1. הראו כי בתחום אין אידמפוטנטים (ראו תרגול 10) פרט ל 0 ו 1.

פתרון: אידמפוטנט $a \in R$ מקיים: $a^2 = a$, ולכן $a(a-1) = a^2 - a = 0$. כיוון ש R תחום נקבל $a = 0$ או $a-1=0$, כלומר $a=0$ או $a=1$ כנדרש.

2. הראו כי אם $1-ab$ הפיך בחוג אזי גם $1-ba$ הפיך.

פתרון:

$1-ab$ הפיך אזי קיים $c \in R$ כך ש $(1-ab)c = 1$, כלומר $c - abc = 1$ או $abc = c - 1$

$(1-ba)\mathrm{bc} = \mathrm{bc} - \mathrm{babc} = \mathrm{bc} - \mathrm{b(abc)} = \mathrm{bc} - \mathrm{b(c-1)} = bc - bc + b = b$.

נכפול את שני האגפים ב a, ונקבל:

$(1-ba)\,\mathrm{bca} = \mathrm{ba}$

כעת נוסיף לשני האגפים $1-ba$ ונקבל

$(1-ba)\,\mathrm{bca} + (1-ba) = \mathrm{ba} + (1-ba) = 1$.

קיבלנו ש $(1-ba)(\mathrm{bca}+1) = 1$.

הראינו ש $1-ba$ הפיך מימין.

$(\mathrm{bca}+1)(1-ba) = bca + 1 - babca - ba = bca + 1 - b(c-1)a - ba = bca + 1 - bca + ba - ba = 1$

3. יהי R חוג עם יחידה. נגדיר בעזרתו חוג חדש $\widetilde{R}$ המכיל את אותם איברים, אך עם פעולות שונות: $a \oplus b = a + b + 1, a \otimes b = ab + a + b$. הראו כי $\widetilde{R}$ חוג <u>עם יחידה</u> ביחס לפעולות $\oplus, \otimes$.

פתרון:

הפעולה החיבורית קומוטטיבית, ולכן מספיק לבדוק איבר נייטרלי ואיבר נגדי רק מצד אחד.

אם קיים איבר יחידה כפלי $e \in \widetilde{R}$, אזי $a = a \otimes e = ae + a + e$ כלומר $ae = -e$ לכל $a \in R$.

אם קיים איבר נייטרלי חיבורי $f \in \widetilde{R}$ אזי $a = a \oplus f = a + f + 1$ כלומר $f = -1$.

אם כך $f = -1$ הוא איבר נייטרלי חיבורי.

נשים לב ש $e = 0$ מקיים את תכונות איבר יחידה כפלי, $a \otimes 0 = a0 + a + 0 = a$ (מראים משמאל באותה צורה).

נשים לב ש $a \oplus (-2-\mathrm{a}) = -1$ ולכן קיים איבר נגדי.

אסוציאטיביות של שתי הפעולות:

$(a \oplus b) \oplus c = (a + b + 1) \oplus c = a + b + c + 2 = \ldots = a \oplus (b \oplus c)$

$(a \otimes b) \otimes c = (ab + a + b) \otimes c = abc + ac + bc + ab + a + b + c = \ldots = a \otimes (b \otimes c)$.

נשאר לבדוק דיסטריבוטיביות:

$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes (b + c + 1) = \mathrm{a}(b + c + 1) + a + (b + c + 1) = ab + ac + 2a + b + c + 1$

$(a \otimes b) \oplus (\mathrm{a} \oplus c) = (\mathrm{ab} + \mathrm{a} + \mathrm{b}) \oplus (\mathrm{a}\,c + a + c) = \mathrm{ab} + \mathrm{ac} + 2\,\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} + 1$

כנדרש.

4. תהי C קבוצת הפונקציות הממשיות הרציפות, נגדיר חיבור וכפל ב C באופן הבא: $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f \otimes g)(x) = f(g(x))$. האם C חוג?

תשובה: לא, נראה שלא מתקיימת דיסטריבוטיביות.

$(f\otimes(g+h))(\mathrm{x})=\mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{x})+\mathrm{h}(\mathrm{x}))$

מצד שני מתקיים

$\big((f\otimes g)+(f\otimes h)\big)(\mathrm{x})=\mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))+f(\mathrm{h}(\mathrm{x}))$. נראה דוגמה בה אין שיויון בין הנ"ל.

אם $f(x)=x^2, g(x)=h(x)=x$.

אזי
$$(f\otimes(g+h))(2)=\mathrm{f}(\mathrm{g}(2)+\mathrm{h}(2))=\mathrm{f}(4)=16$$
$$\big((f\otimes g)+(f\otimes h)\big)(2)=\mathrm{f}(\mathrm{g}(2))+f(\mathrm{h}(2))=\mathrm{f}(2)+\mathrm{f}(2)=8\neq16\cdot$$

5. יהי R חוג ללא יחידה. נגדיר $\hat{R}=R\times\mathbb{Z}$. נגדיר כפל ב $\hat{R}$ ע"י
$(x,n)\otimes(y,m) = (xy+mx+ny,mn)$ וחיבור $(x,n)\oplus(y,m)=(x+y,n+m)$.

הראו ש $\hat{R}$ הוא חוג עם יחידה [שימו לב, $nx=x+...+x$ (חיבור של x עם עצמו n פעמים) עבור n טבעי, ואילו $(-n)x=n(-x)$].

פתרון:

איבר נייטרלי חיבורי הוא $(0,0)$ כי $(x,n)\oplus(0,0)=(x+0,n+0)=(\mathrm{x},\mathrm{n})$ (מצד שמאל מקבלים אותו דבר כי הפעולה קומוטטיבית).

איבר יחידה כפלי הוא $(0,1)$ כי $(x,n)\otimes(0,1) = (x0+1x+n0,1n)=(\mathrm{x},\mathrm{n})$, בצורה דומה מראים משמאל.

איבר נגדי של (x,n) הוא $(-x,-n)$ (בדיקה קלה).

אסוציאטיביות של חיבור נובעת מאסוציאטיביות חיבור ב $R,\mathbb{Z}$.

בדיקת אסוציאטיביות של כפל ודיסטריבוטיביות הן בדיקות סיזיפיות אך טריויאליות, ולכן לא נרשום אותן כאן.

6. הראו שבחוג R עם יחידה בו $x^2=x$ לכל $x\in R$ מתקיים $2x=0$ לכל $x\in R$.

פתרון: $1=(-1)^2=-1$ ולכן $2=1+1=(1-1)=0$. לכן $2x=0x=0$, כנדרש.