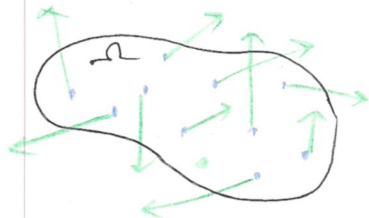
שדות ווקטורים

עבור $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$

$\vec r=(x,y,z)$

שדה סקלרי $F:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\vec r=$ נק' ⇝ מספר



שדה ווקטורי $F:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

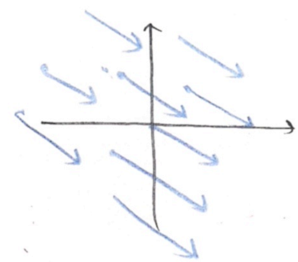
$\vec r=$ נק' ⇝ ווקטור

ב-$\mathbb{R}^3$ מוגדר ע"י $F(\vec r)=F(x,y,z)=(F_1,F_2,F_3)=F_1\vec i+F_2\vec j+F_3\vec k$. ב-$\mathbb{R}^2$: $F(x,y)=F_1\vec i+F_2\vec j$

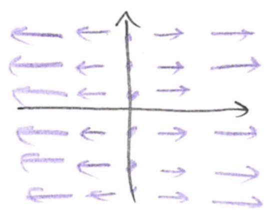
כיצד משרטטים שדה ווקטורי נתון?

מציבים נקודות שונות על לקבלת תמונה כללית.

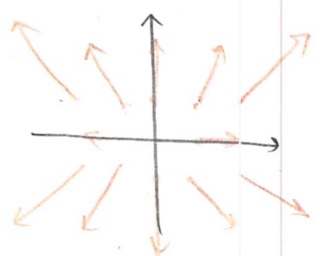
(1) $F(x,y)=2\vec i-\vec j$



(2) $F(x,y)=x\cdot\vec i$



(3) $F(x,y)=x\cdot\vec i+2y\vec j$

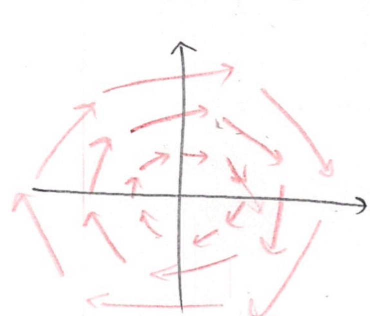


(4) $F(x,y)=y\vec i-x\vec j$

$$\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}_{\text{מטריצת סיבוב ב } 90^\circ}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

סיבוב בזווית α ← $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

ניתן לרשום אותו שדה $F(\vec r)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\vec r$



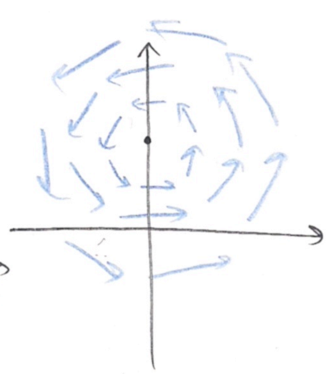
*יש מספר דוגמאות שחשוב להכיר.
מרבית השדות מסובכים מידי בשביל להבין ע"י שרטוט

על סמך הכרות עם דוגמאות נוכל להתאים שדה לשרטוט

סיבוב ב 90°
↓
$F(x,y)=-y\vec i+x\vec j$

הזזה למרכז סיבוב ב $(0,1)$

$F(x,y)=(1-y)\vec i+x\vec j$



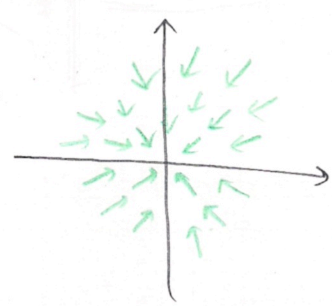
$F(\vec r)=-\vec r$

סוף יש צורך לנרמל ⟵ ברגע שהווקטורים יהיו באותו האורך

⇓

$F(\vec r)=\frac{\vec r}{r}$

$$F(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec i+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec j$$



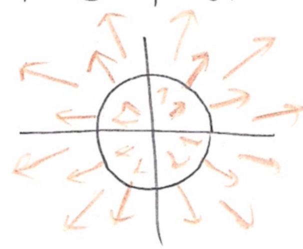
אופרטורים דיפרנציאליים

סימון ∇ נבלה משמש לייצוג אופרטור כך: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

∇f גרדיאנט מתאים לפונקציה $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ שדה וקטורי $\nabla f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

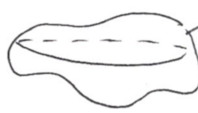
① $f(x,y) = x^2+y^2$

$\rightsquigarrow$ $\nabla f = (2x, 2y)$



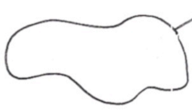
תזכורת בכל נק' ∇f מצביע על כיוון ההתקדמות הגדולה בפונקציה
$|\nabla f|$ שווה לקצב ההתקדמות הגדולה ביותר.

∇f מאונך תמיד למשטח עקומות רמה של f שעובר דרך אותה נקודה:



∇f

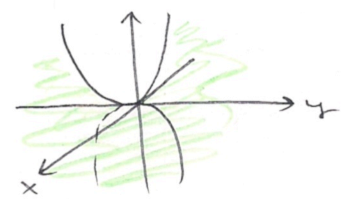
$f(x,y,z)=c$



∇f

$f(x,y)=c$

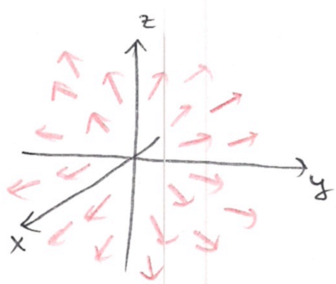
② $f(x,y) = x^2 - y^2$



$\rightsquigarrow$ $\nabla f = (2x, -2y)$

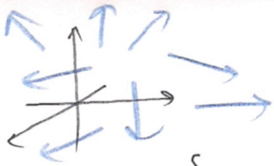
③ $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ $\quad f(\vec{r}) = r \rightsquigarrow f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\nabla f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \rightsquigarrow \nabla f(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r}$$



באופן כללי — שדה וקטורי $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ נקרא שדה פוטנציאלי
אם קיימת פונקציה $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ כך ש $F = \nabla f$
כאן f נקראת פוטנציאל של F

* הערה: אם פוטנציאל f קיים הוא אינו יחיד משום ש $\nabla f = \nabla(f+c) = F$
לכל קבוע c.



דיברגנץ $\mathrm{div}F$ של שדה וקטורי $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

הוא שדה סקלרי $\mathrm{div}\, F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ הנתון ע"י

$$\mathrm{div}\, F = \nabla\cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\cdot(F_1,\dots F_n) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\dots+\frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

<u>דוגמא</u>: חשב $\nabla\cdot F$ עבור $F(x,y,z)=x^2y\vec{i}+z\cdot\vec{j}+xyz\cdot\vec{k}$

$$\nabla\cdot F = \mathrm{div}\, F = \quad + \frac{\partial}{\partial}(z)+\frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 2xy+xy = 3xy$$

רוטור (rotor) / קרל (Curl) – רק ב $\mathbb{R}^3$!

$\mathrm{rot}F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

רוטור של שדה וקטורי $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ הוא שדה וקטורי

$$\mathrm{rot}F = \mathrm{Curl}\,F = \nabla\times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

<u>דוגמא</u>: חשב את הרוטור עבור $F(x,y,z)=xy\vec{i}+\sin z\vec{j}+\hat{k}$

$$\nabla\times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & \sin z & 1 \end{vmatrix} = (0-\cos z)\vec{i}\quad(0-0)\vec{j}+(0-x)\hat{k} = -\cos z\vec{i}-x\vec{k}$$

<u>הערה</u>: כאשר נתון שדה וקטורי ב $\mathbb{R}^2$ $\quad F(x,y)=M\vec{i}+N\vec{j}$

נוח להתייחס אליו כשדה וקטורי ב $\mathbb{R}^3$ ע"י $F(x,y,z)=M\vec{i}+N\vec{j}+0\hat{k}$

ובמקרה זה $\nabla\times F=(N_y-M_x)\hat{k}$

<u>דוגמא</u>: $F(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$

$$\mathrm{rot}F=\mathrm{Curl}F=(0-0)\vec{k}=0$$

זהויות שמקשרות בין האופרטורים השונים:

$$\mathrm{Curl}(\nabla f)=0 \qquad \mathrm{div}(\mathrm{curl}\,F)=0 \quad \dots$$

זהות שמספקת תנאי הכרחי להיות F שדה פוטנציאלי: $\mathrm{rot}F\neq 0$ ← F לא פוטנציאלי

$\mathrm{rot}F=0$ ← יכול להיות שכן...