נכתב על ידי נועם יערי

גבול עליון ותחתון

הגדרה

הגבול העליון של סדרה a_n מסומן $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ הוא הגבול החלקי הגדול ביותר (במובן הרחב) של a_n.

דוגמה

$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-1)^n = 1$ כי $(-1)^n \le 1$ לכל n, ואם ניקח את התת"ס $(-1)^{2n}$. נקבל גבול 1.

למה

אם $a_n \le c$ לכל n, ומתקיים $a_n \to a$, אז $a \le c$.

הוכחה

נניח בשלילה $c < a$, ניקח ϵ מספיק קטן כך ש $c < a - \epsilon$. $a_n \to a$, לכן $a_{n_{\le c}} \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ לבסוף לכן $a - \epsilon < c$ בסתירה.

הערה

ייתכן $a_{n\to a} < c$ ובכל זאת $a = c$. למשל: $\left(-\frac{1}{n}\right)_{\to 0} < 0$, $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\mathrm{n}}\right) = 0$

הערה

לכל סדרה יש תת"ס שמתכנסת במובן הרחב.

הוכחה

אם הסדרה חסומה, אז יש לה תת"ס מתכנסת, ולכן יש לה גבול חלקי (ממשי). אחרת, הסדרה אינה חסומה. אם אינה חסומה מלעיל, אז יש לה תת"ס ששואפת ל - ∞. אם אינה חסומה מלרע, אז יש לה תת"ס ששואפת ל - $-\infty$.

למה

לכל סדרה a_n יש גבול חלקי גדול ביותר.

הוכחה

אפשרות א׳: הסדרה אינה חסומה מלעיל. אז ∞ הוא גבול חלקי, והוא הגדול ביותר.
אפשרות ב׳: הסדרה חסומה מלעיל. שני מקרים:

1. $a_n \to -\infty$ אז $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mathrm{a_n} = -\infty$
2. $a_n \nrightarrow -\infty$. ז״א יש ממשי c כך ש-$c \le a_n$ לאינסוף ערכים של n. תהי b_n התת״ס של a_n המכילה את כל האיברים a_n אשר $c \le$. b_n חסומה. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mathrm{b_n}$ קיים, אז הוא שווה ל $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mathrm{a_n}$. הסבר: $c \le b$ לכל n, ולכן $c \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mathrm{b_n}$ (כגבול של סדרת איברים $c \le$). אילו הייתה ת״ס $a_{m_n} \to a > \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mathrm{b_n} \ge c$, אז לבסוף, פרט למספר סופי של n-ים, $a_{m_n} > c$ (מהלמה בתחילת ההרצאה). נסיר מהסדרה a_{m_n} מס׳ סופי של איברים, נקבל $c \le a_{m_n}$ לכל n. עדיין $a_{m_n} \to a$, וזו ת״ס של b_n אז $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mathrm{b_n} < a \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mathrm{b_n}$ בסתירה. זה מוכיח $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$ גדול או שווה לכל גבול חלקי של a_n. הכיוון $\ge$ מיידי מכך שכל ת״ס של b_n יש גבול חלקי גדול ביותר.

טענה

לכל סדרה חסומה b_n יש גבול חלקי גדול ביותר.

הסדרה חסומה. תהי L קבוצת הגבולות החלקיים של הסדרה. $L \neq \phi$. L חסומה (אם $a_n \le c$ לכל n, אז כל גבול חלקי a יקיים $a \le c$. נסמן $b := \sup L$.
(הערה: a הוא גבול חלקי של סדרה $a_n \leftrightarrow$ כל סביבה של a מכילה אינסוף מאברי הסדרה.)

יהי $\epsilon > 0$. נראה שיש אינסוף מאברי הסדרה בסביבת ϵ של b: $(b-\epsilon, b+\epsilon)$.

$b - \epsilon < b_{\sup L}$ לכן יש $L \ni a < b - \epsilon$. $a \in L$ לכן יש ת״ס $a_{m_n} \to a$. ניקח $\epsilon' > 0$ כך ש $(a-\epsilon', a+\epsilon') \subseteq (b-\epsilon, b+\epsilon)$

$$[\epsilon' < (b+\epsilon) - a, \epsilon' < a - (b-\epsilon)]$$

לכמעט כל n, $a_{m_n} \in (a-\epsilon', b+\epsilon)$ ובפרט $a_{m_n} \in (b-\epsilon, b+\epsilon)$.

■

הגדרה

הגבול התחתון של סדרה a_n הוא הגבול החלקי ביותר שלה ומסומן $\underline{\lim}\, a_n$

נכתב על ידי נועם יערי

למה

לכל סדרה יש גבול תחתון (במובן הרחב)

הוכחה

תהי נתונה a_n. מהלמה הקודמת, קיים $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}(-a_n)$. (תרגיל בית).

משפט

סדרה a_n מתכנסת במובן הרחב $\leftrightarrow$ $\overline{\lim}(a_n) = \underline{\lim}\, a_n$.

הוכחה

$(\rightarrow)$אם $a_n \rightarrow a$ אז לכל ת״ס מתקיים $a_{m_n} \rightarrow a$ ואז $a = \overline{\lim}(a_n) = \underline{\lim}\, a_n$.

$(\leftarrow)$ יהי $a := \overline{\lim}(a_n) = \underline{\lim}\, a_n$. נוכיח $a_n \rightarrow a$. כלומר, לכל סביבה $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ של a, לבסוף, כל $a_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$.

מקרה א: יש אינסוף n-ים כך ש $a_n < a-\epsilon$. לתת הסדרה המורכבת מאיברים אלה יש ת״ס מתכנסת במובן הרחב. $\lim a_n = a > a-\epsilon \geq b$

∎