בשביל לקצר, נגדיר את הפונקציות שלנו בצורה שונה ממה שעשינו בכיתה (אלה עדיין אותן פונקציות). לכל $n=0,1,2,..$ ו־ $k=1-2^n,2-2^n,...,-1,0,1,...,2^n-1,2^n$ נגדיר $h_{n,k}=1_{\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)}$, ואז נגדיר $f_n=\sum_{\text{even }k}h_{n,k}+\sum_{\text{odd }k}h_{n,k}$. לחלופין $f_0=h_{0,1}-h_{0,0}$ ולכל $0<n$ $f_n=\sum_{k=1-2^{n-1}}^{2^{n-1}}h_{n,2k}-h_{n,2k-1}$.

לפני התרגיל, חשוב להדגיש ש:

1. לכל n,k ו־ $f\in L^2$ מתקיים $\langle f,h_{n,k}\rangle=\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}}f\left(t\right)dm\neq 0$.
2. לכל פונקציה מדידה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה $F\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)dm\left(t\right)$ רציפה בהחלט ובפרט רציפה. בנוסף $f\left(x\right)=F'\left(x\right)$ בכ"מ. אם לכל x $F\left(x\right)=0$ אז לכל בפרט $f\left(x\right)=F'\left(x\right)=0$ כב"מ, ז"א ש־ $f\cong 0$ בכל L^p.
3. שקול לומר שאם $f\ncong 0$ אז ישנו x עבורו $F\left(x\right)\neq 0$. לפי רציפות ישנו $0<\epsilon$ לכל $y\in\left(x-\epsilon,x+\epsilon\right)$ מתקיים $F\left(y\right)\neq 0$. בפרט ישנו קירוב בינארי $\frac{r}{2^n}$ עבורו $0\neq F\left(x\right)=\int_0^{\frac{r}{2^n}}f\left(t\right)dm\left(t\right)=\sum_{k=1}^{r}\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}}f\left(t\right)dm\left(t\right)$, ובפרט ישנם k,n עבורם $\langle f,h_{n,k}\rangle=\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}}f\left(t\right)dm\neq 0$.

נרצה לעשות את הדברים הבאים:

1. להוכיח שf_n קבוצה אורתוגונלית. ומצא את הנורמה של כל f_n.
2. מצא את ההיטל של $f(x)=x$ לתוך המרחב $Y=\overline{span\left\{f_n|n\geq 0\right\}}$.
3. מצא בסיס אורתוגונלי $Y^{\perp}$ למרחב המאונך לזה.
4. מצא את ההיטל של $f(x)=x$ ל־ $Y^{\perp}$.
5. הבע את המרחבים Y ו־ $Y^{\perp}$ כפתרונות של משוואות.

נתחיל:

1. נשים לב לכמה דברים בקשר ל־ $h_{n,k}$:

(א) לפי הערה 1 בפתיח $\langle h_{n,k},h_{n,k}\rangle=\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}}1_{\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)}\left(t\right)dm\left(t\right)=\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}}1dm=\frac{1}{2^n}$. ו־ $\langle h_{n,j},h_{n,k}\rangle=\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}}1_{\left[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right)}\left(t\right)dm\left(t\right)=\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}}0dm=0$ ל־ $j\neq k$.

(ב) לפי ההגדרה $\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)=\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k-\frac{1}{2}}{2^n}\right)\cup\left[\frac{k-\frac{1}{2}}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)=\left[\frac{2k-2}{2^{n+1}},\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\cup\left[\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right)$ ולכן $h_{n,k}=h_{n+1,2k-1}+h_{n+1,2k}$.

(ג) בפרט, $\langle h_{n,k},h_{n+1,2k-1}\rangle=\langle h_{n+1,2k-1}+h_{n+1,2k},h_{n+1,2k}\rangle=\frac{1}{2^{n+1}}$ ובדומה $\langle h_{n,k},h_{n+1,2k}\rangle=\frac{1}{2^{n+1}}$. לכל $j\neq k$ $\langle h_{n,j},h_{n+1,2k}\rangle=\langle h_{n+1,2j-1}+h_{n+1,2j},h_{n+1,2k}\rangle=0$ ובדומה $\langle h_{n,j},h_{n+1,2k-1}\rangle=0$.

(ד) וזה גורר ש- $\langle h_{n,j}, h_{n+1,2k}-h_{n+1,2k-1}\rangle = 0$ לכל j ו- k, כולל ל $j=k$.
בנוסף, לכל $m \le n$ מתקיים ש- $h_{m,j}$ הוא סכום של $h_{n,l}$-ים ולכן $\langle h_{m,j}, h_{n+1,2k}-h_{n+1,2k-1}\rangle = 0$ לכל $m \le n$ ולכל j ו- k.

(ה) נובע מידית ש- $\langle h_{m,j}, f_n\rangle = 0$ לכל $m < n$ ו-j (זכור ש- $f_n = \sum_{k=1-2^{n-1}}^{2^{n-1}} h_{n,2k} - h_{n,2k-1}$) ולכן $\langle f_m, f_n\rangle = 0$ לכל $m < n$. זו אורתוגונליות.

(ו) נחשב גם $\langle f_n, f_n\rangle = \sum_{j=1-2^{n-1}}^{2^{n-1}} \sum_{k=1-2^{n-1}}^{2^{n-1}} \langle h_{n,2j}-h_{n,2j-1}, h_{n,2k}-h_{n,2k-1}\rangle = \sum_{j=1-2^{n-1}}^{2^{n-1}} \sum_{k=1-2^{n-1}}^{2^{n-1}} \left(\langle h_{n,2j}, h_{n,2k}\rangle + \langle h_{n,2j-1}, h_{n,2k-1}\rangle - \langle h_{n,2j}, h_{n,2k-1}\rangle - \langle h_{n,2j-1}, h_{n,2k}\rangle\right)$.
בגלל ש- $\langle h_{n,j}, h_{n,k}\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & j=k \\ 0 & j\neq k \end{cases}$ כל זה שווה ל- $\sum_{k=1-2^{n-1}}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right) = 2$. (בנוסף $\langle f_0, f_0\rangle = 2$ מחישוב ישיר). ולכן $\|f_n\|_2 = \sqrt{2}$ לכל n.

2. למרחב Y בסיס אורתונורמלי $\frac{1}{\sqrt{2}}f_n$. ההיטל יהיה $\sum_{n=0}^{\infty} \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}}f_n\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}f_n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \langle f, f_n\rangle f_n$.

(א) נחשב $\langle f, f_n\rangle$. לפי הגדרה $\langle f, h_{n,k}\rangle = \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f(t)\,dm(t) = \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} t\,dm(t) = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} = \frac{2k-1}{2^{2n+1}}$, ו- $\langle f, h_{n,2k}-h_{n,2k-1}\rangle = \frac{4k-1}{2^{2n+1}} - \frac{4k-3}{2^{2n+1}} = \frac{2}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^{2n}}$ ו- $\langle f, f_n\rangle = \sum_{k=1-2^{n-1}}^{2^{n-1}} \langle f, h_{n,2k}-h_{n,2k-1}\rangle = 2^n\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^n}$ ישנו מקרה נפרד $\langle f, f_n\rangle = \langle f, h_{0,0}\rangle - \langle f, h_{0,1}\rangle = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} = -1$.

(ב) אם כן ההיטל הוא $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \langle f, f_n\rangle f_n = -\frac{1}{2}f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} f_n$ אבל למה זה שווה? נציג $x \in [0,1)$ בבסיס בינארי. $x = 0.a_1a_2a_3...$. לכל n $\frac{a_1a_2...a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{a_n}{2^n} = 0.a_1a_2a_3...a_n \le x < 0.a_1a_2a_3...a_n + \frac{1}{2^n} = \frac{a_1a_2...a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{a_n+1}{2^n}$ ולכן אם $a_n = 0$ $f_n(x) = -1$ ואם $a_n = 1$ $f_n(x) = 1$. בכלליות $f_n(x) = 2a_n - 1$. בנוסף $f_0(x) = -1$ ולכן $-\frac{1}{2}f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} f_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} = x = f(x)$!!!! חישוב דומה נותן גם ל- $-1 \le x, 0$ $-\frac{1}{2}f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} f_n(x) = x = f(x)$ ולכן ההיטל של $f(x) = x$ שווה כב"מ ל- $f(x) = x$ (ובמרחב- L^2 שווה כב"מ זה שווה ממש). אם כך ההיטל של f שווה ל- f מה שאומר ש- $f \in Y$!

3. לכל n נגדיר $A_n = span\{h_{n,k}|k\}$. אין צורך לקחת סגור טופולוגי כי זה מרחב ממימד סופי. לפי ההערות בהתחלה מתקיים

(א) ח לכל n מתקיים $A_n \subseteq A_{n+1}$.

(ב) n נגדיר $\{0\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} (A_n)^{\perp}$כי אין איבר שמאונך לכל ה־ $h_{n,k}$מלבד 0. אבל $\bigcap_{n=0}^{\infty} (A_n)^{\perp} = (\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n)^{\perp}$, (אילו שניהם קבוצת כל האיברים שמאונכים לכל איבר בכל A_n) ולכן $\{0\} = (\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n)^{\perp} = \overline{(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n)}^{\perp}$אבל $\overline{(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n)}$ מרחב סגורר, ולכן $\overline{(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n)} = L^2[-1,1]$. (לכל תת מרחב סגור אמיתי של מרחב הילברט יש מרחב מאונך לא ריק).

(ג) בפרט $\overline{(\bigcup_{n=0}^{\infty} Y^{\perp} \cap A_n)} = \overline{Y^{\perp} \cap (\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n)} = Y^{\perp} \cap \overline{(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n)} = Y^{\perp}$(השיוויון השני הוא בגלל ש־ $Y^{\perp}$ קבוצה סגורה).

(ד) בנוסף ,לפי (a) $Y^{\perp} \cap A_n \subseteq Y^{\perp} \cap A_{n+1}$. ולכן, כדי למצוא בסיס אורתונורמלי של $Y^{\perp}$צריך למצוא בסיס אורתונורמלי של $Y^{\perp} \cap A_0$, להרחיב אותו לבסיס אורתונורמלי של $Y^{\perp} \cap A_1$, להרחיב אותו לבסיס אורתונורמלי של $Y^{\perp} \cap A_2$וכך האלה. האיחוד של כולם יהיה בסיס של $Y^{\perp}$. הוא יהיה אורתונורמלי כל שני איברים בו יהיו מוכלים ביחד בבסיס אורתונורמלי של איזשהו $Y^{\perp} \cap A_n$ ובפרט יהיו מאונכים ובאורך 1.

(ה) כדי למצוא את הבסיס הזה, נשים לב שלפי (e1) f_m מאונך למרחב A_n לכל $n < m$. אם כך, כל איבר ב־ A_nכבר מאונך ל $f_{n+1}, f_{n+2}, f_{n+3}, f_{n+4}, \ldots$. משתמשים בזה ככה:

(ו) נמצא קודם בסיס למרחב $Y^{\perp} \cap A_0$. $A_0 = span\{h_{0,0}, h_{0,1}\}$. כל איבר שם כבר מאונך ל־ $f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots$, צריך למצוא אילו מהם מאונכים ל־ $f_0 = h_{0,0} - h_{0,1}$. ז"א, שצריך להשלים את $f_0 = h_{0,0} - h_{0,1}$ לבסיס ב־

4. אם לפי (2) ההיטל של $f(x) = x$ שייך ל־ Yאז ההיטל שלו ל־ $Y^{\perp}$ הוא 0.