mschein@math.biu.ac.il

בוחן (מועד א') - 25/12/19

מועד ב' 8/1/20

(דה שליט, לובוצקי, כוגר "מבנים אלגבריים")

הגדרה:
תהי S קבוצה לא-ריקה. פעולה בינארית על S הינה העתקה: $S \times S \to S$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$(x,y) \to 3x-y$$

הגדרה:
פעולה בינארית נקראת קיבוצית (אסוציאטיבית) אם לכל $a,b,c \in S$ $(a*b)*c = a*(b*c)$

$$(x,y) \to 3x-y$$
$$(x*y)*z = 3(3x-y)-z \neq 3x-(3y-z) = x*(y*z)$$

הגדרה:
חבורה הינה קבוצה לא ריקה G עם פעולה בינארית שמקיימת את האקסיומות הבאות:

א) הפעולה קיבוצית $\forall a,b,c \in G \quad (a*b)*c = a*(b*c)$

ב) קיים איבר יחידה (ניטרלי) $e \in G$ כך ש e $a*e = e*a = a$ לכל $a \in G$

ג) לכל $a \in G$ קיים $a^{-1} \in G$ כך ש e $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$

הערה: אם קיים איבר יחידה, הוא יחיד

$e,e'\in G$ איברי יחידה $e=e*e'=e'$

הגדרה:

קבוצה לא ריקה S עם פעולה בינארית נקראת אגודה (חבורה למחצה) אם היא מקיימת (א).

הגדרה:

קבוצה לא ריקה S עם פעולה בינארית נקראת מונויד (monoid) אם היא מקיימת (א),(ב).

דוגמאות:

1) $\mathbb{N}$ עם פעולת חיבור - אגודה אבל לא מונויד ($0\notin\mathbb{N}$)

2) $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ - מונויד אבל לא חבורה

3) $\mathbb{Z}$ עם חיבור - חבורה

4) $\mathbb{N}$ עם פעולת כפל - מונויד ($e=1$) אך לא חבורה

5) $\mathbb{Z}$ עם כפל - מונויד אך לא חבורה

6) $\mathbb{Q}$ (או כל שדה) עם חיבור - חבורה

7) $\mathbb{Q}$ עם כפל - מונויד אבל לא חבורה (אין הופכי ל-0)

8) F שדה, $F^*=F\setminus\{0\}$, תחת חיבור - אין אפילו פעולה בינארית

$a\in F^*$ $-a\in F^*$ $a-a\notin F^*$

F^* עם כפל - חבורה (מהגדרה של שדה)

9) $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$, פעולה $a*b=ab$ $a,b\in\mathbb{Q}$

$0*\infty=\infty*0=1$

$a*\infty=\infty*a=\infty$

$\infty*\infty=\infty$

מקיימת (ב) $e=1$, מקיימת (ג) $\infty^{-1}=0$

אבל $2=2*(\emptyset*\emptyset) \neq (\emptyset*(\emptyset*2))=1$ (ואפילו לא אגודה)

10) $S=$ קבוצת כל הערים בישראל $a*b=$ העיר הקטנה מבין ה-ב

א) $(a*b)*c=a*(b*c)=$ העיר הקטנה

ב) $e=$ העיר הגדולה ביותר

ג) לא קיים איבר הופכי (חוץ מ-e כמובן)

S - מונואיד

11) תהי A קבוצה. $S_A=\{f: A\to A : \text{חח"ע ועל } f\}$

פעולה: הרכבה של פונקציות

א) ✓ ב) פונקצית הזהות ($e(a)=a$ לכל $a\in A$)

ג) לכל $f\in S_A$ הפיכה

12) A קבוצה $Fun(A)=\{f:A\to A \text{ פונקציה}\}$ עם הרכבה של פו'.

$Fun(A)$ מונויד

13) יהי F שדה $M_{m,n}(F)=\left\{\begin{matrix}\text{מטריצות } m\times n \\ \text{עם איברים ב-}F\end{matrix}\right\}$. פעולה: חיבור.

$e=0_{m\times n}$, $A^{-1}=-A$. חבורה.

14) תהנ"ה G,H שתי חבורות. נגדיר פעולה על $G\times H$

$(g_1,h_1)*(g_2,h_2)=(g_1*g_2, h_1*h_2)$

חבורה. $e=(e_G,e_H)$, $(g,h)^{-1}=(g^{-1},h^{-1})$

החבורה הזאת נקראת המכפלה הישרה של G,H

15) $\mathbb{Z}$ עם הפעולה $a*b=\min\{a,b\}$

אגודה אך לא מונויד. כי אין ל-$\mathbb{Z}$ איבר מקסימלי

16) S אגודה כלשהי, אך לא מונויד?

$S\cup\{0\}$ $a*0=0*a=a$ לכל $a\in S\cup\{0\}$. זה מונויד?

למשל: אם נוסיף ∞ לדוגמה א

17) S קבוצה כלשהי: $a*b=a$ לכל $a*b\in S$

$a*(b*c)=(a*b)*c=a$. אם $|S|>1$ אין איבר יחידה

אגודה אך לא מונויד. שנקראת אגודה של אפסים משמאל

18) F שדה. $M_n(F)=\{$מטריצות $n\times n$ עם איברים ב-$F\}$. עם כפל מטריצות

$M_n(F)$ מונויד ($e=I$). לא חבורה כי ל-$0_{n\times n}$ אין הופכי

19) יהיו a,b אותיות. $F_2=\{$כל המילים שאפשר לכתוב על ידי $a,b,a^{-1},b^{-1}\}$. פעולה: שרשור מילים

הפעולה קיבוצית

מונויד: $e=\emptyset$ המילה הריקה

חבורה: $(aaab^{-1}abab^{-1}a)^{-1}=a^{-1}ba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba^{-1}a^{-1}a^{-1}$

נקרא חבורה חופשית על שני יוצרים

20) קונפיגורציות של הקוביה ההונגרית

סדר החבורה: 43,252,003,274,489,856,000

הגדרה:

יהי M מונויד. יהי $m\in M$

אג׳ $p\in M$ נקראות הופכי מימין של m אם $mp=e$

$p\in M$ נקראות הופכי משמאל של m אם $pm=e$

דוגמה:

$M=F_{nn}(\mathbb{N})=\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\}$ פעולת הרכבה

$$f(n)=n+1\ ,\ g(n)=\begin{cases} n-1 & n>1\\ 5780 & n=1\end{cases}$$

$$(g\circ f)(n)=n$$

$$(f\circ g)(n)=f(g(n))=g(n)+1=\begin{cases} n & n>1\\ 5781 & n=1\end{cases}\qquad fg\neq e$$

לכן g, הינו הופכי משמאל של f אבל הופכי מימין של f

תרגיל:

יהי $f\in F_{nn}(S)$ לf יש הופכי משמאל $\Longleftrightarrow$ f חח״ע

לf יש הופכי מימין $\Longleftrightarrow$ f על

הגדרה:

M מונויד. איבר $m\in M$ נקרא הפיך אם יש לו הופכי דו צדדי, כלומר אם קיים $p\in M$ כך ש: $mp=pm=e$

נסמן $U(M)=\{m\in M: m \text{ הפיך}\}$

טענה:

יהי M מונויד

א) הקבוצה $U(M)$ של איברים הפיכים סגורה לכפל (לכל $m_1,m_2 \in U(M)$ $\quad$ $m_1m_2 \in U(M)$)

ב) לכן $U(M)$ יורשת פעולה בינארית מ- M

$U(M)$ עם הפעולה הנ"ל היא חבורה

הוכחה:

א) יהיו $m_1,m_2 \in M$ הפיכים. אזי קיימים $p_1,p_2 \in M$

כך ש:

$$p_1m_1 = m_1p_1 = e$$
$$p_2m_2 = m_2p_2 = e$$

נשים לב ש:

$$(m_1m_2)(p_2p_1) = m_1p_1 = e$$
$$(p_2p_1)(m_1m_2) = e$$

לכן p_2p_1 הינו הופכי דו צדדי של m_1m_2, לכן

$m_1m_2 \in U(M)$

ב) הפעולה על M היא קבוצתית, $e \in U(M) \Leftarrow e*e=e$

לכל איבר ב- $U(M)$ יש הופכי. לכן, $U(M)$ אכן חבורה.

דוגמא:

F שדה. $M=F$ עם כפל. M מונויד

$U(M)=F^*=F\setminus\{0\}$ וזו חבורה

דוגמה:

$M = M_n(F)$ עם כפל מטריצות

$U(M) = \{$ מטריצות מתאימות הפיכות עם .ם. רכיבים ב- $F \}$ לפי הטענה הקודמת,

$U(M)$ הינה חבורה

סימון $U(M_n(F)) = GL_n(F)$

דוגמאות נוספות:

1) $M = \mathbb{Z}$ עם כפל. $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$

2) $M = \mathbb{N} \cup \{0\}$ עם חיבור. $U(M) = \{0\}$

3) זוגים בחורף. $M = \{\ldots\}$ $U(M) = \{$ העיר הגדולה ביותר $\}$

(הצעיר $= a * b$ הקטנה מבין ה-ב)

הגדרה:

תהי G חבורה. תת קבוצה $H \subseteq G$ נקראת תת-חבורה אם:

א) H סגורה לפעולה של G (לכפל) $(\forall h_1, h_2 \in H : h_1 h_2 \in H)$

ב) H עם הפעולה הנ"ל היא חבורה

טענה:

תהי G חבורה, $H \subseteq G$ תת-קבוצה. אזי H תת-חבורה אם ורק אם היא מקיימת:

א) סגירות לכפל

ב) סגירות להפכיים: לכל $h \in H$ גם $h^{-1} \in H$

הוכחה:

$(\Leftarrow)$

תהי $H \neq \emptyset$ תת-קבוצה המקיימת את התנאים.

צ"ל H תת-חבורה

H סגורה לכפל.

G חבורה ולכן הפעולה שלה קיבוצית.

יהי $h \in H$ $(H \neq \emptyset)$ לפי ההנחה $h^{-1} \in H$. H סגורה ולכן $hh^{-1} = e \in H$

לפי ההנחה לכל איבר קיים הופכי. ולכן סה"כ H תת חבורה

טענה:

יהי M מונואיד, יהי $m \in M$ הפיך. אזי יש ל-m רק הופכי דו-צדדי אחד.

הוכחה:

יהי $m \in M$ הפיך. ויהיו $p, q \in M$, שני הפכיים דו צדדיים

כלומר $mq = qm = mp = pm = e$

לכן, $p = p(mq) = (pm)q = q$

טענה:

תהי G חבורה, יהי $g \in G$. יהי $h \in G$ ונניח כך e $gh = e$
אז $h = g^{-1}$

הוכחה:

$$gh = e \Rightarrow g^{-1}gh = g^{-1} \Rightarrow h = g^{-1}$$

דוגמה:

$$SL_n(F) = H = \{A \in GL_n(F) : \det A = 1\}$$

נבדוק את התנאים של הטענה 1.2

א) סגירות לכפל $\det A = \det B = 1$ ואז $\det AB = 1$
ולכן $AB \in SL_n(F)$

ב) סגירות להפכיים: אם $A = SL_n(F)$, ואז

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1$$

לכן $A^{-1} \in SL_n(F)$.

לפי טענה 1.2 $SL_n(F)$ וכן תת-חבורה של $GL_n(F)$

טענה 1.2':

תהי G חבורה, $H \subseteq G$ תת חבורה לא ריקה
אזי H תת-חבורה $\Longleftrightarrow$ לכל $h_1, h_2 \in H$ $h_1 h_2^{-1} \in H$

$G = GL_2(\mathbb{R})$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

תרגיל: הוכח ש H תת-חבורה