מערך תרגול 13

201 − 88 תשע"ח סמסטר ב'

1 עקמומיות ראשיות, עקמומיות גאוס, עקמומיות ממוצעת

תזכורת 1 תהי $p \in M$ ויהיו v_1, v_2 הו"ע (המאונכים) של של W_p. נסתכל על העקומות המישורית

$$\beta_1 = M \cap E_1, \qquad \beta_2 = M \cap E_2$$

כאשר E_1, E_2 מישורים המוגדרים ע"י

$$E_1 = Span(v_1, n), \qquad E_2 = Span(v_2, n)$$

אז עקמומיות גאוס מקיימת $K_p = \tilde{k}_{\beta_1}\tilde{k}_{\beta_2}$.

תרגיל 1 יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח מוגדר ע"י גרף של $z = f(x, y)$ כאשר $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$.
יהי (e_1, e_2, e_3) הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

א. מיצאו מטריצת הסיאן H_f של f בראשית הצירים.

ב. יהיו λ_i (כאשר $i = 1, 2$) ערכים עצמיים של H_f. יהי v_i וקטור עצמי במישור (x, y) השייך לערך עצמי λ_i. נגדיר מישור $E_i \subset \mathbb{R}^3$ ($i = 1, 2$) הנפרש ע"י e_3 ו־ v_i. נגדיר עקומה $\gamma_i \subset \mathbb{R}^3$ ע"י $\gamma_i = M \cap E_i$.

מיצאו את העקמומיות המסומנת של כל אחת מהעקומות γ_i בראשית הצירים.

ג. חשבו את העתקת ווינגרטן של M בראשית הצירים ואת עקמומיות גאוס של M בראשית הצירים.

ד. חשבו את העקמומיות הממוצעת של M בראשית הצירים.

פתרון 1

א.

$$H_f = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

ב. נשים לב שראשית הצירים נקודה קריטית כי $f_x = f_y = 0$ שם, לכן המישור T_pM מקביל למישור xy ו־ $H_f = \left(L^i{}_j\right)$ בנקודה זו.

העקמומיות המסומנות $\tilde{k}_{\beta_i}$ הן לכן $\tilde{k}_{\beta_i} = k_i = \lambda_i$.

נמצא את הערכים העצמיים: הפולינום האופייני הוא $(6-x)^2 - 4 = 0$ כלומר הערכים העצמיים הם $\lambda_{1,2} = 4, 8$ ואלה הם העקמומיות המסומנות של β_1, β_2.

ג.

$$K = \tilde{k}_{\beta_1}\tilde{k}_{\beta_2} = \lambda_1\lambda_2 = 4 \cdot 8 = 32$$

ד. עקמומיות ממוצעת $H = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) = 6$.

2 עקמומיות גאוס בקואורדינטות איזותרמיות

תזכורת 2

א. אופרטור לפלס־בלטרמי Δ_{LB} של מטריקה שקולה קונפורמית למטריקה שטוחה סטנדרטית עם גורם קונפורמי $\lambda(x,y) > 0$ מוגדר ע"י

$$\Delta_{LB}(h) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)$$

ב. בהינתן מטריקה בקואורדינטות איזותרמיות עם מקדמים

$$g_{ij} = \lambda(x,y)\delta_{ij}$$

עקמומיות גאוס היא

$$K = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}(\ln\lambda)$$

לחלופין אם נסמן

$$g_{ij} = f^2(x,y)\delta_{ij}$$

אז עקמומיות גאוס היא

$$K = -\Delta_{LB}(\ln f)$$

תרגיל 2 יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח עם פרמטריזציה $x(u^1, u^2)$.

א. נניח שהמטריקה היא

$$\frac{c^2}{y^2}\delta_{ij}$$

כאשר $x = u^1$ ואילו $y = u^2$. חשבו את עקמומיות גאוס $K(x, y)$.

ב. נניח שהמטריקה היא

$$\begin{pmatrix} \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר $\theta = u^1$ ואילו $\phi = u^2$. חשבו את עקמומיות גאוס $K(\theta, \phi)$.

פתרון 2

א. גורם קונפורמי

$$\lambda(x, y) = \frac{c^2}{y^2}$$

כלומר

$$f(x, y) = \frac{c}{y}$$

לכן באמצעות אופרטור לפלס בלטרמי

$$\begin{aligned} K = -\Delta_{LB}(\ln f) &= \frac{-1}{\lambda}\Delta(\ln f) \\ &= \frac{-y^2}{c^2}\Delta(\ln\frac{c}{y}) \\ &= \frac{-y^2}{c^2}\Delta(\ln c - \ln y) \\ &= \frac{-y^2}{c^2}(-\ln y)'' \\ &= \frac{-y^2}{c^2}\frac{1}{y^2} \\ &= \frac{-1}{c^2} \end{aligned}$$

ב.

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^{-2}\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כמו כן

$$(g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} 2\sin\phi\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

רק $g_{11;2} = 2\sin\phi\cos\phi$ שונה מ-0.

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}(g_{11;1} - g_{11;1} + g_{11;1})g^{11} = 0 \\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}(g_{12;1} - \overbrace{g_{11;2}}^{2\sin\phi\cos\phi} + g_{12;1})g^{22} = -\sin\phi\cos\phi \\
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}(\overbrace{g_{11;2}}^{2\sin\phi\cos\phi} - g_{12;1} + g_{21;1})g^{11} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}(g_{12;2} - g_{12;2} + g_{22;1})g^{22} = 0 \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}(g_{21;2} - g_{22;1} + g_{21;2})g^{11} = 0 \\
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}(g_{22;2} - g_{22;2} + g_{22;2})g^{22} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K &= \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1,2]} + \Gamma^j_{1[1}\Gamma^2_{2]j}\right) \\
&= \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1,2]} + \Gamma^1_{1[1}\Gamma^2_{2]1} + \Gamma^2_{1[1}\Gamma^2_{2]2}\right) \\
&= \frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\right) \\
&= \sin^{-2}\phi\left(-cos(2\phi) - 0 + 0 - \frac{\cos\phi}{\sin\phi}(-\sin\phi\cos\phi) + 0 - 0\right) \\
&= \frac{-\cos(2\phi) + \cos^2\phi}{\sin^2(\phi)} \\
&= \frac{-\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)}{\sin^2(\phi)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

3 משפט גאוס בונה

תזכורת 3 (למעשה יהיה בהרצאה רק אחרי התרגול)

א. מאפיין אוילר $\chi(M)$ של משטח M הוא

$$\chi(M) = V - E + F$$

באשר V, E, F הם בהתאמה מספר הקודקודים, צלעות ופיאות של M לאחר שמחלקים אותו למשולשים.

אם המשטח אוריינטבילי מתקיים $\chi(M) = 2 - 2g$ באשר g הוא ה־ $genus$ של המשטח (מספר החורים או ה"ידיות" שבו).

ב. משפט גאוס בונה: תהי $K_p = K(u^1, u^2)$ עקמומיות גאוס בנקודה $p = x(u^1, u^2)$. אז

$$\int_M K_p dA_M = 2\pi\chi(M)$$

תרגיל 3 חשבו את

$$\int_M K_p dA_M$$

עבור הספירה $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ בשתי דרכים:

א. ע"י חישוב ישיר.

ב. ע"י משפט גאוס בונה.

פתרון 3

א. פרמטריזציה

$$x(\theta, \phi) = (r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)$$

כפי שכבר ראינו בעבר עקמומיות גאוס של ספירה בכל נקודה היא $\frac{1}{r^2}$.

כלומר

$$\int_M K_p dA_M = \int_M \frac{1}{r^2} dA_M = \frac{1}{r^2} \overbrace{\int_M dA_M}^{4\pi r^2} = 4\pi$$

ב. לספירה

$$g = 0$$

כלומר

$$\chi = 2 - 2 \cdot 0 = 2$$

כלומר לפי משפט גאוס בונה $\int_M K_p dA_M = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$.

תרגיל 4 עבור הטורוס שהוא משטח הסיבוב של העקומה

$$\alpha(\phi) = (a + b\cos\phi, 0, b\sin\phi)$$

באשר $b < a$, חשבו את

$$\int_M K_p dA_M$$

בשתי דרכים:

א. ע"י חישוב ישיר.

ב. ע"י משפט גאוס בונה.

פתרון 4

א. עקמומיות גאוס של הטורוס

$$K = \frac{\cos\phi}{a(a\cos\phi + b)}$$

אלמנט השטח

$$dA_M = \sqrt{|(g_{ij})|} = \sqrt{\begin{vmatrix} (a\cos\phi + b)^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{vmatrix}}$$
$$= b(a\cos\phi + b)$$

לכן

$$\int_M K_p dA_M = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi}{a(a\cos\phi + b)} b(a\cos\phi + b) d\theta d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{b}{a}\cos\phi d\phi d\theta = 0$$

ב. לטורוס "חור" אחד כלומר

$$g = 1$$

כלומר

$$\chi(M) = 0$$

לכן לפי משפט גאוס בונה

$$\int_M K_p dA_M = 0$$