שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה דיפרנציאלית ואנליטית (88-201)
שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
סמסטר א', מועד א': 28.2.12

<u>יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות.</u>

<u>משך הבחינה: שלוש שעות.</u>

1. נתונה תבנית ריבועית $Q(x,y)=-3x^2+4xy-6y^2$
   א. עקומה מישורית מוגדרת ע"י המשוואה $Q(x,y)=-1$. מהי צורת העקומה?
   ב. מהי העקמומיות הכוללת של עקומה זו?
   ג. מהי צורת המשטח המתקבל כגרף של התבנית הריבועית $z=Q(x,y)$?
   ד. חשב את עקמומיות גאוס של הגרף בנקודה $(0,0,0)$.

המטריצה $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ מייצגת את התבנית, נלכסן אותה. הפולינום האופייני הוא
$\begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 \\ -2 & \lambda+6 \end{vmatrix} = \lambda^2+9\lambda+14$ ולכן $\lambda = \frac{-9\pm\sqrt{81-56}}{2} = -7,-2$. נסמן $\lambda_1=-7$ ו-
$\lambda_2=-2$.
אף אחת מהשאלות לא דורשת חישוב של הווקטורים העצמיים.

א) כשנציג את התבנית הריבועית $-3x^2+4xy-6y^2=-1$ בקורדינאטות $(\tilde{x},\tilde{y})$ של בסיס אורתונורמלי היא תקבל את הצורה $-7\tilde{x}^2-2\tilde{y}^2=-1$ או לחלופין $7\tilde{x}^2+2\tilde{y}^2=1$, וזו אליפסה.

ב) כמו שלמדנו, העקמומיות הכוללת של עקומת ז'ורדן במישור (ואליפסה היא אכן עקומת ז'ורדן) היא תמיד 2π.

ג) הערכים העצמיים λ_1,λ_2 קובעים את צורת המשטח $z=Q(x,y)$. במקרה שלנו שניהם שליליים ולכן הגרף הוא פרבולואיד היפרבולי "יורד" עם מקסימום בראשית הצירים.

ד) המשטח הוא מהצורה $\big((x,y,f(x,y))\big)$ כאשר $f(x,y)=-3x^2+4xy-6y^2$.
חישבנו שלמשטחים מהסוג הזה התבנית היסודית הראשונה היא $\begin{pmatrix} 1+{f'_x}^2 & f'_xf'_y \\ f'_xf'_y & 1+{f'_y}^2 \end{pmatrix}$
והתבנית היסודית השנייה היא $\frac{1}{\sqrt{1+{f'_x}^2+{f'_y}^2}}\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}$ במקרה שלנו בראשית הצירים
$f'_x=f'_y=0$, $f''_{xx}=-3$, $f''_{xy}=4$ ו- $f''_{yy}=-6$ ולכן $(g_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
$(L_{ij})=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ ולפי הנוסחא $K=\frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})}=2$.

2. יהי $M\subset\mathbb{R}^3$ משטח עם פרמטריזציה $x(u^1,u^2)$.
   א. תנו שלושה דרכים של חישוב של עקמומיות גאוס של $M\subset\mathbb{R}^3$.
   ב. נניח שהמטריקה היא $\frac{c^2}{y^2}\left(dx^2+dy^2\right)$ כאשר $x=u^1$ ואילו $y=u^2$, וחשב את עקמומיות גאוס $K=K(x,y)$ שלה.
   ג. נניח שמטריקה היא $(\sin^2\varphi)\left(d\theta^2\right)+d\varphi^2$ כאשר $\theta=u^1$ ואילו $\varphi=u^2$, וחשב את עקמומיות $K=K(\theta,\varphi)$ של המטריקה.

א) פשוט צריך לתת שלוש מארבע הנוסחאות לעקמומיות גאוס, שהן

$.K=\frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1:2]}+\Gamma^j_{1[1}\Gamma^2_{2]j}\right)$ ו- $K=\frac{2}{g_{11}}L_{1[1}L^2_{2]}$,$K=\frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})}$,$K=\det(L^j_i)$

ב) עם נתונה לנו רק המטריקה אנחנו יודעים רק את התכונות הפנימיות של המשטח ולא את L^j_i או L_{ij}, ולכן אי אפשר להשתמש בשלושת הנוסחאות הראשונות. אפשר להשתמש באחרונה אבל במקרה שלנו המטריקה היא מהצורה $E(dx^2+dy^2)$ ($E=\left(\frac{c}{y}\right)^2$) ולכן ניתן להשתמש באופרטור לפלס בלטרמי של E $.\Delta_{LB}(f)=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$

לפי הנוסחא

$$K=\Delta_{LB}\left(\log\sqrt{E}\right)=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\log\sqrt{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\log\sqrt{E}}{\partial y^2}\right)=\frac{y^2}{c^2}\left(\frac{\partial^2\log\frac{c}{y}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\log\frac{c}{y}}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{y^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\log\frac{c}{y}}{\partial y}\right)=\frac{y^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{-c}{y^2}}{\frac{c}{y}}\right)=\frac{y^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{-1}{y}=\frac{y^2}{c^2}\frac{1}{y^2}=\frac{1}{c^2}$$

נשים לב שזה משטח עם עקמומיות קבוע חיובית.

ג) שוב יש לנו רק מטריקה, אבל הפעם היא לא איזוטרמית אז חייבים להשתמש בנוסחא $.K=\frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1:2]}+\Gamma^j_{1[1}\Gamma^2_{2]j}\right)$ המטריקה היא $(\sin^2\varphi)d\theta^2+d\varphi^2$ מה שאומר שהתבנית היסודית הראשונה היא $(g_{ij})=\begin{pmatrix}\sin^2\varphi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ולכן $(g^{lk})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sin^2\varphi} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

הנוסחא לסימני כריסטופל לפי התבנית היסודית הראשונה היא:

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\left(g_{il:j}+g_{jl:i}-g_{ij:j}\right)g^{lk}$$

אם נציב את ערכי g^{lk} קודם נקבל $\Gamma^1_{ij}=\frac{1}{2\sin^2\varphi}\left(g_{i1:j}+g_{j1:i}-g_{ij:1}\right)$

ו- $\Gamma^2_{ij}=\frac{1}{2}\left(g_{i2:j}+g_{j2:i}-g_{ij:2}\right)$ במקרה שלנו $g_{11:1}=g_{12:1}=g_{12:2}=0$,

$g_{22:1}=g_{22:2}=0$ ו- $g_{11:2}=2\sin\varphi\cos\varphi$ נציב ונקבל:

$\Gamma^1_{11}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{22}=0$, $\Gamma^1_{12}=\cot\varphi$ ו- $.\Gamma^2_{11}=-\sin\varphi\cos\varphi$

לפי הנוסחא $K=\frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{11:2}-\Gamma^2_{12:1}+\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21}-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}+\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}-\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\right)$

כמעט כל האיברים מתאפסים ונשאר $.K=\frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{11:2}-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}\right)$

נחשב מיד ש- $\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}=-\cos^2\varphi$ ו- $\Gamma^2_{11:2}=\sin^2\varphi-\cos^2\varphi$ (זו הנגזרת של Γ^2_{11} לפי φ) ונציב $.K=\frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi+\cos^2\varphi\right)=1$

שוב זה משטח עם עקמומיות קבוע חיובית.

.3

א. לגבי משטח M עם מקדמים g_{ij} של תבנית יסודית ראשונה, הגדר את אלמנט השטח dA שלה.

ב. בטאו משפט גאוס-בוננה לגבי משטח סגור קמור M.

ג. לגבי משטח $M_1\subset\mathbb{R}^3$ מוגדר על ידי משוואה $x^2+y^2+2z^2=1$ מצאו את האינטגרל $\int_{M_1}KdA$.

ד. לגבי $M_2\subset\mathbb{R}^3$ מוגדר ע"י $\left(x^2+y^2+2z^2-1\right)\left((x-10)^2+y^2+2z^2-1\right)=0$ מצאו את האינטגרל $\int_{M_2}KdA$.

א) עבור מטריקה $\left(g_{ij}(u^1,u^2)\right)$ אלמנט השטח הוא $dA=\sqrt{\det(g_{ij})}\,du^1du^2$ (ז״א שאם רואים אינטגרל מהצורה $\int f dA$ הוא שווה ל- $\int f\sqrt{\det(g_{ij})}\,du^1du^2$)

ב) משפט גאוס-בוננה אומר שאם משטח סגור (קומפקטי, בלי שפה) S מוגדר ע״י פרמטריזציה $X(u^1,u^2)$ אז $\int_S KdA=2\pi\chi(S)$ ($\chi(S)$ הוא מאפיין האוילר של S).
בפרט זה אומר שהאינטגרל הזה, העקמומיות הכוללת, תלוי רק בטופולוגיה של המשטח ולא במטריקה שלו.

ג) המשוואה הזאת מגדירה אליפסואיד. אליפסואיד הוא הומיאומורפי לספירה ולכן מאפיין האוילר שלו הוא 2. בפרט לפי גאוס בונט $\int_{M_1} KdA=2\pi\chi(M_1)=4\pi$.

ד) M_2 הוא איחוד זר של קבוצות הפתרון של $x^2+y^2+2z^2=1$ ושל $(x-10)^2+y^2+2z^2=1$, ז״א איחוד זר של שני פרבולואידים. על כל אחד מהפרבולואידים האינטגרל ייתן 4π ולכן האינטגל על האיחוד ייתן $4\pi+4\pi=8\pi$.

4. יהי D_p (עם $p=0$) מרחב של פונקציות $f=f(u)$ כאשר $f:\square\to\square$.
   א. הגדר מושג של דריבציה $X:D_p\to\square$.
   ב. הוכח ש דריבציה X בהכרח מתאפסת על פונקציות f קבועות.
   ג. יהי $u=u^1$ פולינום מוני בדרגה 1, ונניח $C=X(u)$. לכל $f\in D_p$, בטא $X(f)$ באמצעות $C=X(u)$ וגם $\frac{d}{du}$ מיושם ל $f=f(u)$.
   ד. מצא ממד של מרחב הדריבציות של D_p.

א) דירוציה היא אופרטור ליניארי $X:\mathbb{D}_p\to\mathbb{R}$ שמקיים את כלל לייבניץ׳ ב- p:

$$X(fg)=X(f)g(p)+f(p)X(g)$$

ב) עבור הפונקציה הקבועה 1 כלל לייבניץ אומר ש-

$$X(1)=X(1\cdot 1)=X(1)1+1X(1)=2X(1)$$

ולכן $X(1)=0$. לפי ליניארית לכל פונקציה קבועה a מתקיים $X(a)=aX(1)=0$.

ג) כל פונקציה f חלקה ב- p מקיימת $f(u)=f(p)+(u-p)\frac{df}{du}|_p+(u-p)g(u)$ כאשר g היא פונקציה חלקה ב- p עם $g(p)=0$, ולכן

$$X(f)=X\big(f(p)\big)+X\left((u-p)\frac{df}{du}|_p\right)+X\big((u-p)g(u)\big)$$

לפי ב) האיבר הראשון בסכום שווה ל- 0, לפי ליניאריות X האיבר השני שווה ל- $\frac{df}{du}|_pX(u-p)=\frac{df}{du}|_p\big(X(u)-X(p)\big)=C\cdot\frac{df}{du}|_p$. לפי כלל לייבניץ האיבר השלישי שווה ל- $X(u-p)g(p)+(p-p)X\big(g(u)\big)=0$, ולכן הסכום שווה ל- $C\cdot\frac{df}{du}|_p$.

ד) הדיוורציה $\frac{d}{du}|_p$ פורשת את המרחב הזה לבדה – היא בסיס בגודל 1 ולכן המימד הוא 1.

5. כתוב את הביטויים הבאים באמצעות Γ_{ij}^k, L_ℓ^k, וגם L_{ij}:
   א. $\langle x_{ij},x_k\rangle g^{ik}$.
   ב. $\langle n_j,x_{\ell k}\rangle$.
   ג. $\langle n,x_{pq}\rangle g^{qs}$.

ד. $\delta^i{}_j\delta^j{}_k\delta^k{}_i$ כאשר $i,j,k=1,2,\dots,n$.

א) לפי ההגדרה $x_{ij}=\Gamma_{ij}^p x_p+L_{ij}n$ ו- $g^{ik}=g^{ki}$ לכן

$$\langle x_{ij},x_k\rangle g^{ik}=\langle\Gamma_{ij}^p x_p+L_{ij}n,x_k\rangle g^{ki}=\left(\Gamma_{ij}^p\langle x_p,x_k\rangle+L_{ij}\langle n,x_k\rangle\right)g^{ki}$$

$\langle n,x_k\rangle=0$ ו- $\langle x_p,x_k\rangle=g_{pk}$ לכן $\langle x_{ij},x_k\rangle g^{ki}=\Gamma_{ij}^p g_{pk}g^{ki}$.

לפי כפל מטריצות $g_{pk}g^{ki}$ הוא האיבר ה- p,i במטריצה המכפלה $\left(g_{pk}\right)\left(g^{ki}\right)$, אבל לפי ההגדרה $\left(g^{ki}\right)=\left(g_{pk}\right)^{-1}$ (המטריצה ההפוכה) ולכן $\left(g_{pk}\right)\left(g^{ki}\right)$ מטריצת היחידה ו- $g_{pk}g^{ki}=\delta_p^i$. בפרט $\langle x_{ij},x_k\rangle g^{ki}=\Gamma_{ij}^p\delta_p^i=\Gamma_{ij}^i$.

ב) $x_{ij}=\Gamma_{ij}^p x_p+L_{ij}n$ ולכן

$$\langle n_j,x_{lk}\rangle=\langle n_j,\Gamma_{lk}^p x_p+L_{lk}n\rangle=\Gamma_{lk}^p\langle n_j,x_p\rangle+L_{lk}\langle n_j,n\rangle$$

כעת $0=0'_j=\langle n,x_p\rangle_j=\langle n_j,x_p\rangle+\langle n,x_{pj}\rangle$ ולכן $\langle n_j,x_p\rangle=-\langle n,x_{pj}\rangle=-L_{pj}$

בעוד ש- ואילו $0=1'_j=\langle n,n\rangle_j=\langle n_j,n\rangle+\langle n,n_j\rangle=2\langle n_j,n\rangle$ ולכן $\langle n_j,n\rangle=0$.

נציב ונקבל $\langle n_j,x_{lk}\rangle=-\Gamma_{lk}^p L_{pj}$.

ג) לפי ההגדרה $x_{ij}=\Gamma_{ij}^k x_k+L_{ij}n$ ומכיוון ש- n מאונך לכל x_k $L_{ij}=\langle x_{ij},n\rangle$. בפרט $\langle n,x_{pq}\rangle g^{qs}=L_{pq}g^{qs}=-L_p^s$ (זו הנוסחא המקשרת בין L_{ij} ו- L_i^j)

ד) התוצאה פה היא רק סקאלר. מכיוון שכל פרמטר מופיע למעלה ולמטה הסכום רץ על כולם – $\sum_{i,j,k=1}^n\delta_j^i\delta_k^j\delta_i^k$. כאשר $i\neq j$ או $j\neq k$ הביטוי בסכום מתאפס, ולכן נשארנו רק אם המקרים בהם $i=j=k$, ואז הסכום הוא $\sum_{i=1}^n\delta_i^i\delta_i^i\delta_i^i=\sum_{i=1}^n 1=n$.

בהצלחה!