88-524-תרגיל 3-פתרון:

1. הוכיחו או הפריכו:

א) אם $R(A,B;C,D) = R(A,B;C,D')$ אז $D=D'$.

ד) אם $R(A,B;C,D)=1$ אז $C=D$.

לא נכון כש- $A=B$

ב) אם $R(A,B;C,D) = R(A,B';C',D)$ אז $B=B', C=C'$.

ג) אם $R(A,B;C,D) = R(A,B';C',D)$ אז $AB' / AC' = AB / AC$.

לא נכון. למשל: $A=1,B=3,C=2$, $D=4,B' = 2$, $C' = 4/3$

ה) אם $R(A,B;C,D) = R(B,A;C,D)$ אז $A=B$ או $C=D$. לא נכון. למשל כשהנקודות הרמוניות

2. א) נסתכל על הספרה ב- R^3, ז"א על קבוצת הנקודות:

$$S^2 = \{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$$

נגדיר יחס שקילות על S^2:

$$(x,y,z) \sim (x',y',z') \Leftrightarrow (-x,-y,-z) = (x',y',z')$$

הוכיחו שיש מיפוי חח"ע ועל בין הנקודות ב- RP^2 לבין הנקודות במרחב המנה $S^2/\sim$.
(למעשה מיפוי זה הוא הומיאומורפיזם).

נקודה $(x:y:z)$ ב- RP^2 היא ישר L ב- R^3 העובר דרך הראשית.
נגדיר את המיפוי $f:RP^2 \rightarrow S^2/\sim$ על ידי $f(L) = L \cap S^2$.
יש שתי נקודות בחיתוך זה, אבל שתיהן באותה מחלקה ולכן המיפוי מוגדר היטב.
צ"ל חח"ע ועל.

<u>חח"ע</u>: אם $f(L) = (a,b,c) = (e,d,f) = f(M)$ הן שתי מחלקות שקילות שוות ב- $S^2/\sim$ אז $(a,b,c)=\pm(e,d,f)$ ולכן הישרים M,L (העוברים דרך הראשית ודרך אחת מהנקודות) מתלכדים.

<u>על</u>: למחלקה $\pm(a,b,c)$ (כנקודה ב- $S^2/\sim$) נתאים את הנקודה $(a:b:c)$ ב- RP^2.

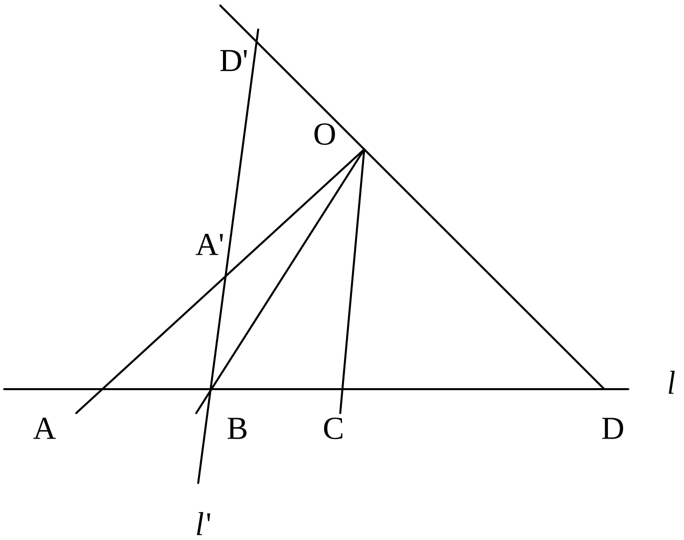
(שימו לב: אם מתעקשים לעשות התרגיל בקואורדינטות, אז f מוגדר כך:
$$f((x:y:z)) = \frac{\pm 1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$$
.)

ב) הכלילו את סעיף א) עבור המישור הפרויקטיבי ה- n מימדי: RP^n (ז"א – נסחו טענה מתאימה והוכיחו אותה).

מכיוון ש- נקודה ב- RP^n היא ישר L ב- R^{n+1} העובר דרך הראשית, ניתן להגדיר את המיפוי $RP^n \rightarrow S^n/\sim$ באותו אופן.

3. תהיינה A,B,C,D ארבע נקודות על ישר l , O נקודה שאינה על הישר. נעביר דרך B ישר המקביל ל- OC ותהיינה A',D' נקודות החיתוך של הישר עם OA,OD . הוכיחו ש- R(B,C;A,D) = A'B/D'B רק על פי העובדה שפרספקטיבה שומרת על יחס כפול.

נקרא לישר המקביל ל OC l' :



כעת, בנוסף ל A',D' נגדיר B'=B ו C' =חיתוך בין l' ל OC(אשר מתרחש באינסוף).

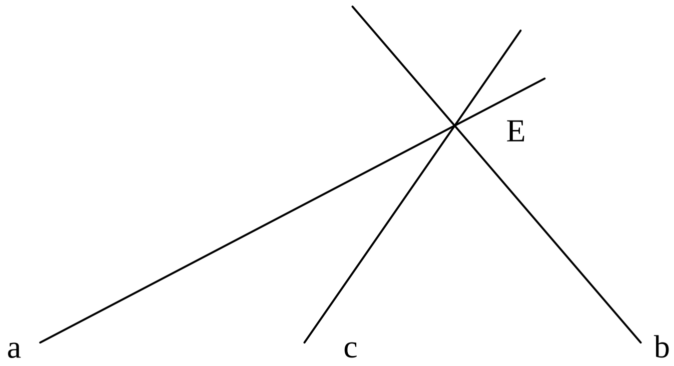
כלומר: $\begin{cases} A'=l'\cap OA \\ B'=l'\cap OB \\ C'=l'\cap OC \\ D'=l'\cap OD \end{cases}$. כעת, גם הן וגם A,B,C,D בפרספקטיבה מ O .

נשים לב כי היות ו C' נמצאת באינסוף מרחקה ל A' ול D' זהה ולכן:

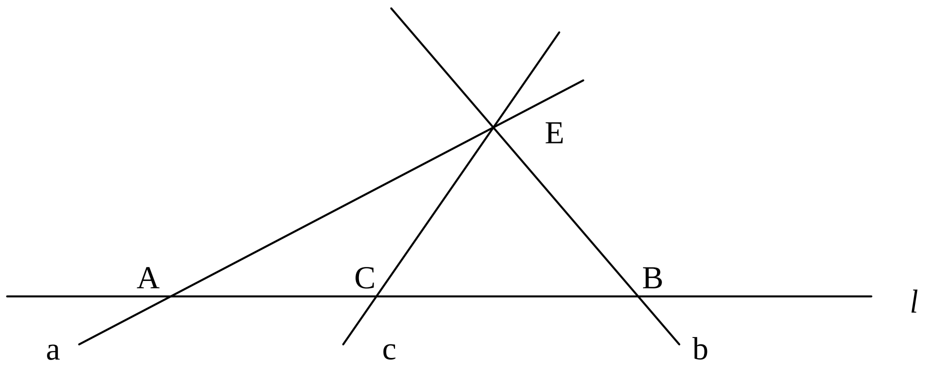
$$R(B,C;A,D)=R(B,C';A',D')=\frac{BA'}{C'A'}\frac{C'D'}{BD'}=\frac{BA'}{BD'}$$

4. תהיינה A,B,C שלוש נקודות על ישר l ונקודה P שאינה על l. בשיעור ראיתם את הבניה הגיאומטרית של נקודה D על l כך שהרביעייה A,B,C,D היא הרמונית.
תארו (ציירו) בניה דואלית של הנ"ל: התחילו עם שלישיית ישרים a,b,c קונקורנטיים בנקודה L ובנו ישר d שעובר דרך L כך שרביעייה a,b,c,d הרמונית(כלומר היחס בין נק' החיתוך של ישרים אלו עם כל ישר הרמוני). הוכיחו שאכן הרביעייה הרמונית.

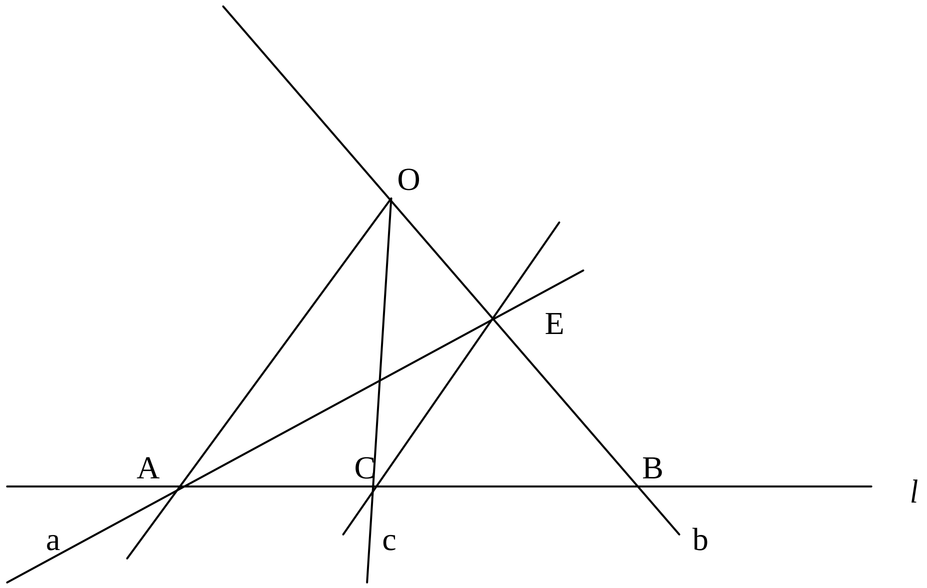
פתרון:
נתבונן ב 3 ישרים קונקורנטיים לנקודה E: a,b,c



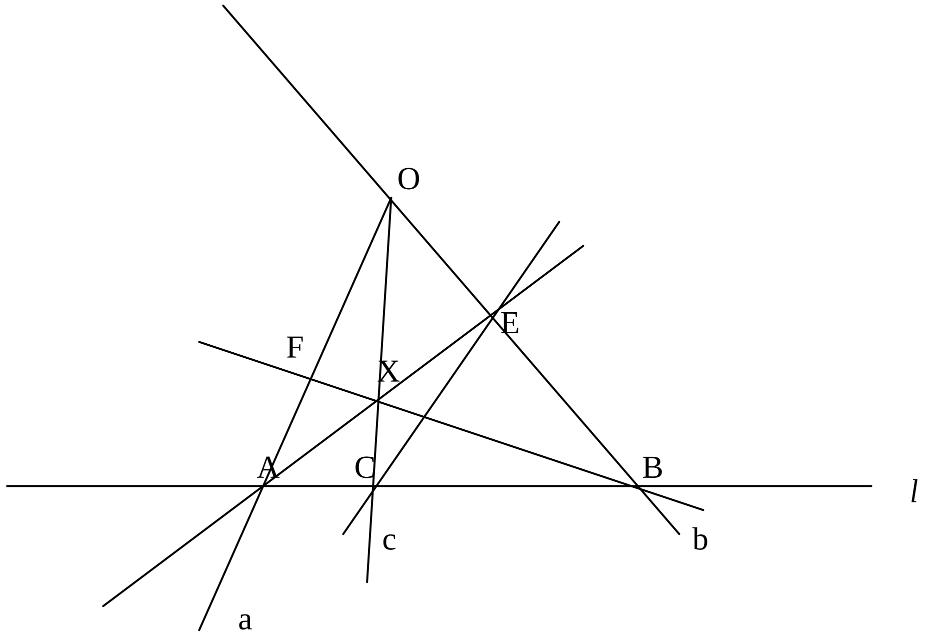
נעביר ישר שאיננו קונקורנטי להם- l וניתן שם לחיתוכים בהתאמה:



נבחר נקודה O על המשכה של b ונעביר CO,AO :



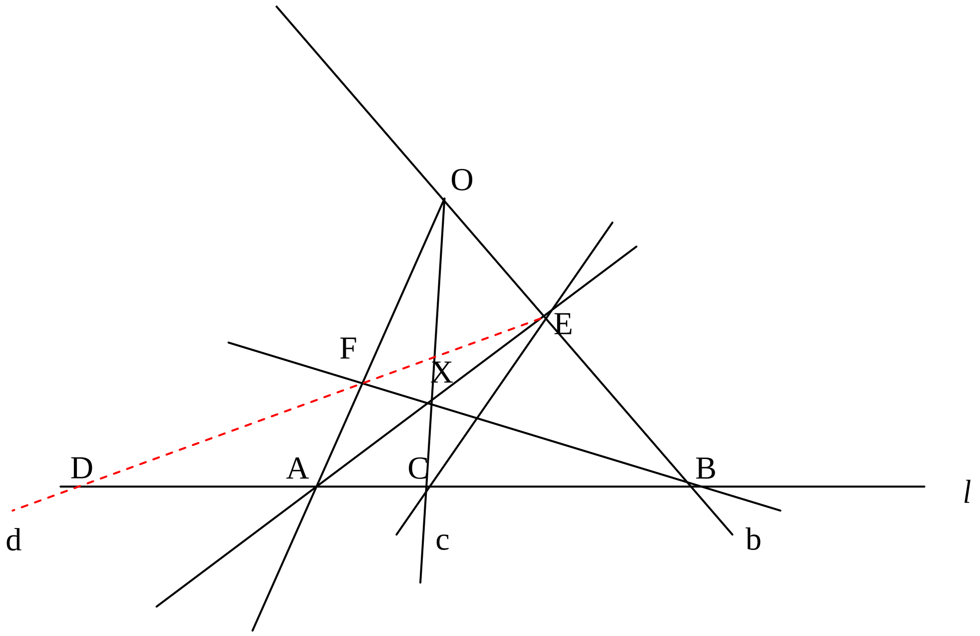
נגדיר $CO \cap AE = X$, נעביר BX ונגדיר $BX \cap AO = F$



לבסוף נגדיר :

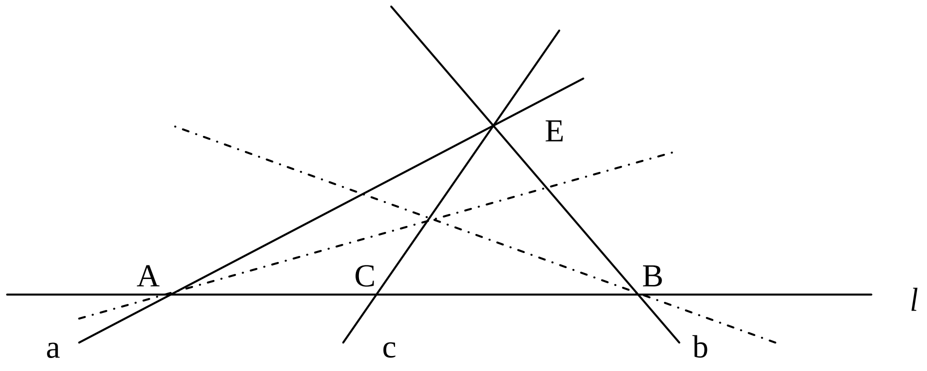
$D = EF \cap l,$

$d = DE$

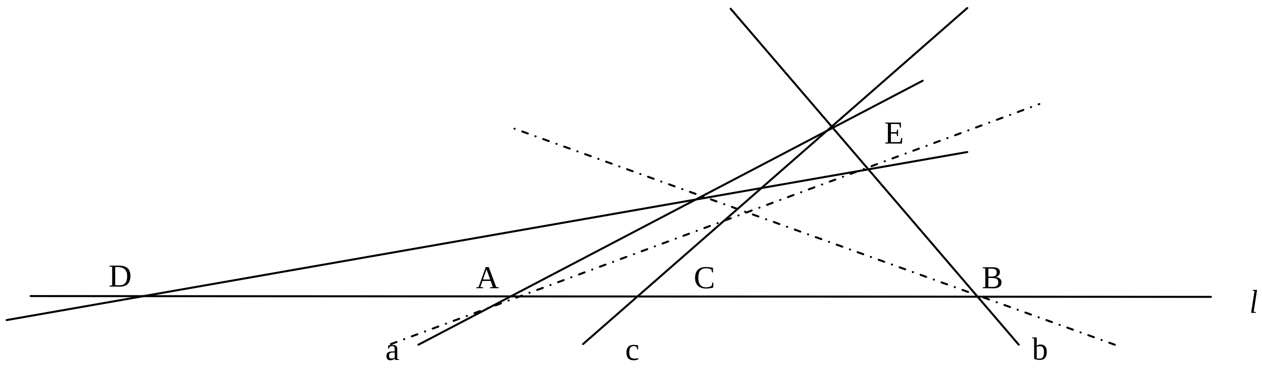


הנקודות A,B,C,D הרמוניות כפי שהוכח בכיתה ולכן הישרים a,b,c,d הרמוניים.

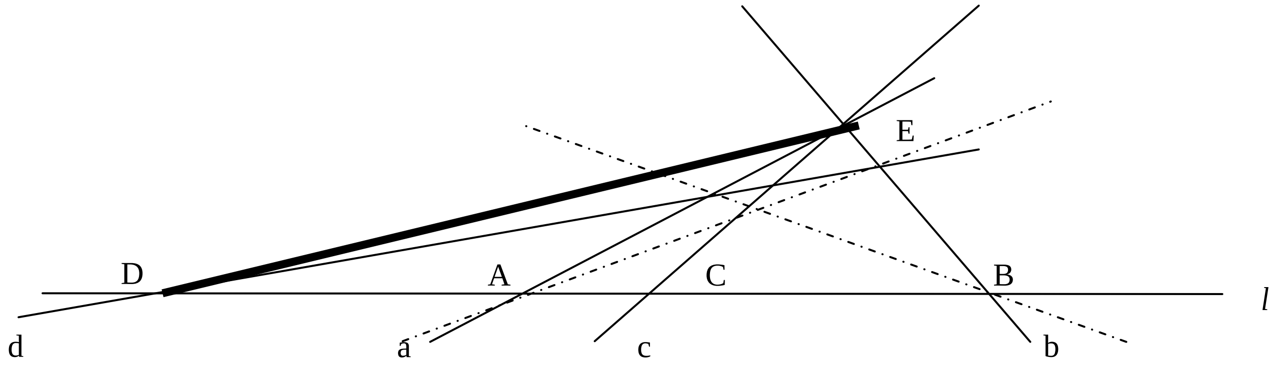
(או פשוט נעביר ישרים קונקורנטים דרך CE:



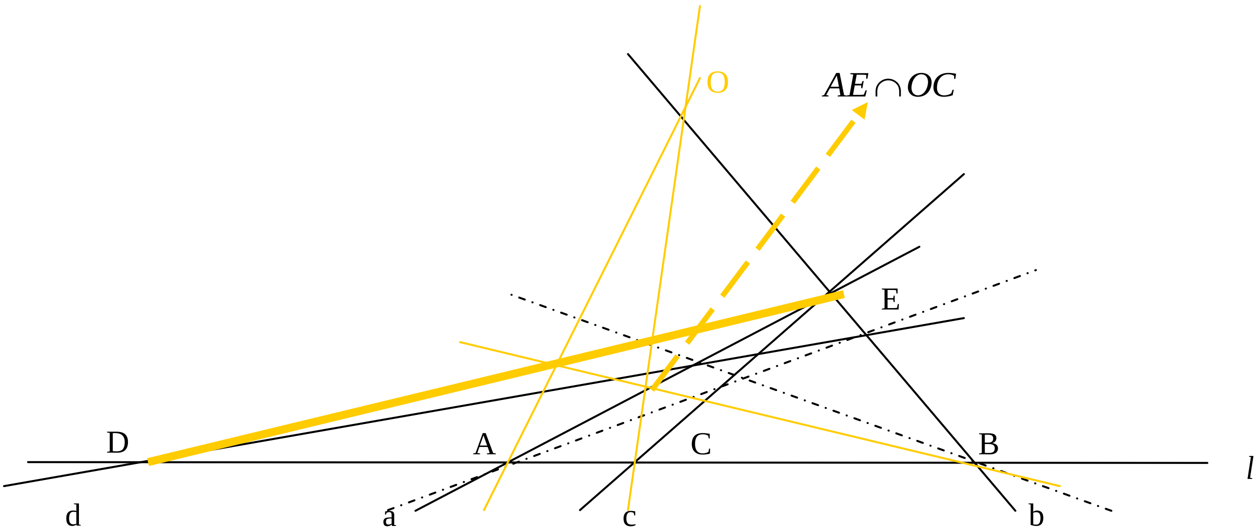
ואז את הישר דרך נק' החיתוך שלהם עם AE ו-BE כדי למצוא את D:



ושוב d=DE :



נוסיף שוב את הבניה דרך הנק' O (בצהוב) כדי להראות שהם מתלכדים:



אכן d=DE לא השתנה).