

פתרון תרגיל בית מספר 4 – ליניאריות מדמ"ח

שאלה 1:

תהי $T: V \rightarrow W$ הע"ל והיו $\{v_1, \dots, v_n\}$ ווקטורים ב- V . הוכיחו או הפריכו:

א. אם T חח"ע ו- $\{v_1, \dots, v_n\}$ בת"ל, אזי $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל
הוכחה: נתבונן בצ"ל $a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = 0$ ונרצה להוכיח ש- $a_1 = \dots = a_n = 0$.

T הע"ל ולכן מתקיים $a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = 0$. אך

ההעתקה היא חח"ע, ולכן הווקטור היחיד שנשלח לאפס הוא אפס. לכן

$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$. הקבוצה $\{v_1, \dots, v_n\}$ היא בת"ל ולכן $a_1 = \dots = a_n = 0$, כדרוש.

ב. אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בת"ל, אזי $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל

הפרכה: תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $T(x, y) = (x, x)$. שני הווקטורים

$\{(1, 2), (1, 1)\}$ הם בת"ל, אך התמונות שלהם לא- $T(1, 2) = (1, 1) = T(1, 1)$.

ג. אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס עבור V ו- $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בסיס עבור W אזי T היא

אזומורפיזם.

הפרכה/הוכחה: שימו לב לבעייתיות בשאלה הזאת: לא נאמר שכל הווקטורים בקבוצה

$\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ הם שונים! אם הם שונים – ניתן להוכיח את הטענה. אנחנו נניח שאין

$$\begin{cases} T(1, 0, 0) = (1, 0) \\ T(0, 1, 0) = (1, 0) \\ T(0, 0, 1) = (0, 1) \end{cases}$$

דרישה כזאת ולכן נביא הפרכה: תהי $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י:

. אזי הקבוצה $\{(0, 1), (1, 0)\}$ (נקבוצה) היא בת"ל, אך ההעתקה אינה איזומורפיזם (מטעמי מימדים).

שאלה 2:

תהיינה $T: V \rightarrow W$, $S: W \rightarrow U$ העתקות ליניאריות.

א. הוכיחו כי $\ker(T) \subseteq \ker(S \circ T)$

הוכחה: יהי $x \in \ker T$. אזי $T(x) = 0$ ומכיוון ש- S הע"ל, מתקיים:

$$S \circ T(x) = S(T(x)) = S(0) = 0$$

לכן $x \in \ker(S \circ T)$.

ב. נניח בנוסף ש- $S \circ T$ היא העתקת האפס. הוכיחו כי $\text{Im}(T) \subseteq \ker(S)$.

הוכחה: יהי $w \in \text{Im} T$ וצ"ל ש- $S(w) = 0$. אם $w \in \text{Im} T$ אזי קיים $v \in V$ כך ש-

$$T(v) = w, \text{ כעת, } S(w) = S(T(v)) = (S \circ T)(v) = 0$$

שאלה 3:

יהי V מ"ו ותהי $T: V \rightarrow V$ הע"ל המקיימת $T^2 = T \circ T = 0$. הוכיחו כי

$$\dim \ker(T) \geq \frac{\dim V}{2}$$

הוכחה: לפי משפט הדרגה מתקיים $\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = \dim V$. $T \circ T$ היא העתקת האפס ולכן לפי סעיף ב' של שאלה קודמת נקבל: $\operatorname{Im} T \subseteq \ker T$ ולכן $\dim \operatorname{Im} T \leq \dim \ker T$. מתקיים: $\dim V = \dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T \leq 2 \dim \ker T$ ולכן $\frac{\dim V}{2} \leq \dim \ker T$. כדרוש.

שאלה 4:

יהי V מרחב ווקטורי מעל F ותהי $T: V \rightarrow V$ הע"ל המקיימת $T^3 = 0$. נתון בנוסף שקיים ווקטור $v \in V$ כך ש- $T^2(v) \neq 0$.

- א. הוכיחו שההעתקה $(I - T)$ היא איזומורפיזם ומצאו את $(I - T)^{-1}$.
 ב. הוכיחו כי הקבוצה $\{v, T(v), T^2(v)\}$ היא בת"ל.

רמז לסעיף א': $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$.

פתרון:

- א. על מנת להוכיח שההעתקה היא איזומורפיזם, יש לבדוק את שלוש התכונות: העתקה ליניארית, חח"ע ועל. אך במקרה שלנו זו העתקה ממרחב לעצמו, ולכן מספיק לבדוק אחד משני התנאים האחרונים (משיקולי מימד במשפט הדרגה). ליניאריות: $(I - T)$ היא ליניארית כהפרש של שתי העתקות ליניאריות (ראיתם בכיתה). חח"ע: (שקול להראות שהגרעין הוא טריוויאלי) יהי $v \in V$ כך ש- $(I - T)v = 0$ ונרצה להראות ש- $v = 0$. מתקיים: $v = Tv \Rightarrow (I - T)v = Iv - Tv = 0$. נפעיל T על שני האגפים ונקבל: $Tv = T^2v$. נפעיל T פעם נוספת ונקבל $T^2v = T^3v = 0$. לכן $T^2v = 0$ ולכן גם $Tv = 0$ וכן גם $v = 0$ (הצבה לאחור). לכן $(I - T)$ היא איזומורפיזם. נמצא את ההעתקה ההופכית: לפי הרמז מתקיים $(I - T)(I + T + T^2) = I - T^3 = I$ ולכן, מכיוון ש- $T^3 = 0$ נקבל $I = (I - T)(I + T + T^2)$. משמע, ההעתקה ההופכית ל- $(I - T)$ היא $(I + T + T^2)$.
- ב. נתבונן בצ"ל $av + bT(v) + cT^2(v) = 0$ ונרצה להראות ש- $a = b = c = 0$. נפעיל את T על שני האגפים ונקבל: $aT(v) + bT^2(v) + cT^3(v) = aT(v) + bT^2(v) = 0$.

נפעיל T פעם נוספת ונקבל: $aT^2(v) + bT^3(v) = aT^2(v) = 0$. מכיוון שלפי הנתון $T^2(v) \neq 0$, נקבל $a = 0$. באותו אופן מקבלים $b = c = 0$ ולכן הקבוצה הנתונה היא בת"ל.

שאלה 5:

יהי $V = \{a \cos \theta + b \sin \theta : a, b \in \mathbb{R}\}$ מרחב ווקטורי (שאיבריו הן פונקציות של θ). הוכיחו או הפריכו: $V \cong \mathbb{R}^2$.

(שימו לב שאם בחרתם להוכיח את הטענה, עליכם להציג איזומורפיזם ולהוכיח שהוא אכן איזומורפיזם)

פתרון:

הטענה נכונה. נמצא את האיזומורפיזם הדרוש.

הקבוצה $\{\cos \theta, \sin \theta\}$ מהווה בסיס ל- V (מדוע?), ולכן נגדיר את האיזומורפיזם $T: V \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} T(\cos \theta) = (1, 0) \\ T(\sin \theta) = (0, 1) \end{cases} \quad \text{(באמצעות משפט ההגדרה) באופן הבא:}$$

הוכחה שזהו אכן איזומורפיזם:

ליניאריות: אין צורך לבדוק כי משפט ההגדרה מבטיח זאת.

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{חח"ע/על: נבדוק באמצעות המטריצה המייצגת. מתקיים}$$

קל מאוד לראות שההעתקה היא חח"ע ועל.

(תזכורת: התמונה של ההעתקה נפרשת ע"י העמודות, והגרעין הוא מרחב האפס של המטריצה).