תרגיל מספר 7 מבנים אלגבריים

להגשה עד 26.12.2014

1. תהא G חבורה סופית . H תת חבורה של G ו K תת חבורה של H. הוכח כי

$$|G/K| = |G/H| \cdot |H/K|$$

2.

(א) תהא G חבורה. יהא $g \in G$ מסדר n (n טבעי). יהא $n = ab$ פירוק של המספר n. הוכח כי הסדר של g^a הוא b

(ב) טענה: תהא G חבורה בת p^n איברים (כאשר p מספר ראשוני ו n מספר טבעי). הוכח כי קיים $g \in G$ מסדר p. (רמז: ניתן להוכיח טענה זאת באינדוקציה).

3.

(א) תהא G חבורה. H תת חבורה. הוכח כי מספר הקוסטים השמאליים שווה למספר הקוסטים הימניים.
כלומר הקבוצות $K_1 = \{gH \,|g \in G\}$ $K_2 = \{Hg \,|g \in G\}$ בעלות עוצמה שווה.
(הדרכה : הגדר $\phi : K_1 \to K_2$ ע"י $\phi(gH) = Hg^{-1}$. הוכח כי ϕ מוגדרת היטב, חח"ע ועל)

(ב) תהא G חבורה. H ת"ח. הוכח כי אם הסדר של G/H הוא 2 אז מתקיים כי

$$\forall g \in G: \; gH = Hg$$