תרגיל 5

1. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:
   (א) הטופולוגיה טריויאלית.
   (ב) לכל סדרה x_n ו $x \in X$ מתקיים $x_n \to x$ (כל סדרה מתכנסת לכל איבר)

2. נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה

$$\tau = \{O_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$$

כאשר

$$O_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

   (א) מצאו סדרה שמתכנסת לכל איבר $n \in \mathbb{Z}$.
   (ב) האם קיימת סדרה שיש לה גבול יחיד? אם כן, תנו דוגמא. אם לא- הוכיחו.

3. תהי (X, τ_{cof}) קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקו-סופית עליה.
   (א) תהי $\{x_n\} \subseteq X$ סדרה. הוכיחו שמתקיים אחד מהבאים:
      i. $\{x_n\}$ לא מתכנסת.
      ii. ל$\{x_n\}$ יש גבול יחיד.
      iii. $\{x_n\}$ מתכנסת לכל איבר בX.
   (ב) יהי Y מרחב טופולוגי מטריזבילי, ותהי $f : X \to Y$ פונקציה רציפה. הוכיחו שf קבועה.
   (ג) הוכיחו ש(X, τ_{cof}) אינו מטריזבילי. (הוכיחו שבעבור קבוצה סופית הטופולוגיה הקוסופית היא מטריזבילית)

4. הוכיחו שהרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה.

5. יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $A, B, C \subseteq X$ תתי קבוצות כך ש $C \subseteq A \cup B$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) אם C פתוחה ב $A \cup B$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B.

(ב) אם $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B אז C פתוחה ב $A \cup B$.

6. (א) יהי X מרחב טופולוגי. ניקח תתי קבוצות $Z \subseteq Y \subseteq X$. הטופולוגיה של X משרה טופולוגיות תת מרחב על Y וזו משרה טופולוגית תת מרחב על Z. הראו שזו בדיוק טופולוגית תת המרחב ש X משרה על Z (אם הטענה הזאת הייתה לא נכונה היה מאוד קשה לדבר על תתי מרחבים).

   (ב) הוכיחו כי טופולוגית תת מרחב של טופולוגיה קו-סופית היא בעצמה טופולוגיה קו-סופית.

7. תהי $f : X \to Y$ פונקציה רציפה, ויהי $A \subseteq X$. הוכיחו ש $f|_A : A \to Y$ רציפה.

8. יהי (X, τ) מ״ט. הוכיחו ש (X, τ) טריויאלי אמ״ם לכל $\emptyset \neq A \subseteq X$, A צפופה ב X.

9. יהי X מרחב טופולוגי. תהיינה $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה ו$A \subseteq X-$ קבוצה **צפופה**, כלומר $cl\left(A\right) = X$.

   (א) הוכיחו: $U \subseteq cl\left(A \cap U\right)$.

   (ב) הוכיחו: $cl\left(U\right) = cl\left(A \cap U\right)$.

10. יהי (X, τ) מ"ט וA, B תתי קבוצות. הוכיחו/ הפריכו: במקרה שאין שוויון, האם יש הכלה שנכונה תמיד?

   (א) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$

   (ב) $int(A \cup B) = int(A) \cup int(B)$