

## תרגיל 7

1. נסמן  $X = [0, 1) \cup \left\{2 + \frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{2\}$ . מצאו את המסלולים של פעולת  $\text{Homeo}(X)$  על  $X$ .

2. יהיו  $(X, \tau), (Y, \sigma)$  מרחבים טופולוגיים, תהי  $f : X \rightarrow Y$  ו- $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ . נניח גם ש- $x \in X$  ו- $A \subseteq X$ . לבסוף, נניח ש- $\gamma_\tau$  פרה־בסיס ל- $\tau$  ו- $\gamma_\sigma$  פרה־בסיס ל- $\sigma$ . הוכיחו שאת התכונות הבאות מספיק לבדוק על  $\gamma_\tau$  ו- $\gamma_\sigma$ :

(א) מתכנסת ל- $x$   $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

(ב)  $f$  פונקציה רציפה

(ג)  $A$  צפופה

(ד)  $X$  ספרבילית

(ה)  $X$  היא  $T_2$

3. יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי ותהי  $A \subseteq X$  תת־קבוצה צפופה. הוכיחו ש- $\gamma := \left\{B\left(a, \frac{1}{n}\right)\right\}_{a \in A, n \in \mathbb{N}}$  היא בסיס לטופולוגיה של  $X$ .

4. מתי  $(X, \tau_{\text{cof}})$  היא  $B_2$ ? מתי היא  $B_1$ ?

5. יהי  $(X, \tau)$  מרחב  $B_2$ . הוכיחו שלכל כיסוי פתוח  $\tau$   $\{O_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$  (כלומר כזה שמקיים  $\bigcup_{i \in I} O_i = X$ ) יש תת־כיסוי בן־מניה.

6. הוכיחו שתת־מרחב של  $B_2$  הוא  $B_2$  (כלומר  $B_2$  היא תורשתית).

7. הראו ש- $l_p$  הוא  $B_2$  עבור  $1 \leq p < \infty$ .

8. נסתכל על טופולוגיית סורגנפרי  $\tau_s$  על  $\mathbb{R}$  שמוגדרת כאיחוד של כל הקטעים מהצורה  $[a, b)$ , כלומר

$$\tau_s := \left\{ \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i) \mid \forall i \in I : a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

(א) הראו שהיא האוסדורף

- (ב) הראו שהטופולוגיה הזו ממידה אפס ולכן בלתי קשירה לחלוטין
- (ג) הסיקו שכל פונקציה רציפה  $f : (\mathbb{R}, \tau_{|\cdot|}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_S)$  מהטופולוגיה האוקלידית הינה קבועה.
- (ד) מה היחס בינה ובין הטופולוגיה האוקלידית?
- (ה) הראו שהיא ספרבילית
- (ו) הראו שהיא אינה  $B_2$
- (ז) הראו שהיא כן  $B_1$
- (ח) הסיקו שהיא אינה מטריזבילית

9. השלימו את הטבלה

$FU$	$B_2$	$B_1$	מימד 0	הומוגני	מרחב טופולוגי
					המרחב הדיסקרטי
					הטופולוגיה הטריטוריאליית
					$\mathbb{R}^n$
					$[0, 1]$
					$(\mathbb{Z}, d_p)$
					$(\mathbb{Q}, d_p)$
					$(\mathbb{Z}, d_p)$
					$(\mathbb{Q}, d_p)$
					$l_1$
					$l_2$
					$l_\infty$
					$(C[0, 1], d_\infty)$
					$(C[0, 1], d_1)$
					$(\{a, b\}, \tau_{\text{Sierpiński}})$
					עבור $X$ אינסופי $(X, \tau_{\text{cof}})$
					עבור $X$ לא בן מניה $(X, \tau_{\text{coc}})$
					$([0, 1]^2, \tau_{\text{lex}})$
					$(\mathbb{R}, \tau_S)$
					סינוס טופולוגי