

תרגיל 6 - פונקציות מרוכבות

1. תהי פונקציה שלמה המקיימת $|f(z) - f(2z)| \leq 10$, הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

2. תהי פונקציה שלמה. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם לכל z מתקיים $f(z) = f(iz)$ אזי f קבועה.

3. תהיינה $f(z)$ ו- $g(z)$ פונקציות שלמות כך ש- $|f(z)| < |g(z)|$ לכל $z \in C$. הוכיחו כי $f(z) = cg(z)$ כך ש- $c \in C$ עבור $|c| < 1$.

4. תהי $f(z)$ אנליטית בתחום פשוט קשר D ויהי $C = \{z \in C \mid |z - z_0| = R\}$ מעגל שנמצא ב- D . אם $|f(z)| \leq M$ לכל z הנמצאת על C אזי מתקיים

$$|f^n(z)| \leq \frac{n!M}{R^n}$$

(רמז: היעזר בנוסחת קושי המוכללת).

5. תהי פונקציה שלמה המקיימת כי $|f(z)| \leq M|z|^n$ עבור $M > 0$ כלשהו. הוכיחו כי $f(z)$ היא פולינום ממעלה n לכל היותר. (רמז: היעזר בתרגיל הקודם)