

113-88-תרגיל 4:

1. עבור המט' הבאות מצא: ע"ע, ו-ו"ע, במידה A לכסינה, מצא: מט' מלכסנת P ומט' אלכסונית D וכמו כן את:  $A^{-1}, A^3$  ע"י שימוש בפרוק  $A = PDP^{-1}$ .  
(רמז לחזקות: לאחר שמצאתם את הפרוק היזכרו שבעצם  $A^n$  הוא מכפלת A n פעמים (מה קורה ל P ?). השתמשו בחישוב חזקתה של מטריצה אלכסונית שהיא פשוטה מאוד...)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad .א$$

$$\lambda_{1,2} = -1, -2 \Rightarrow \text{לכסינה } -A$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} P^{-1}, A^3 = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad .ב$$

$$\lambda_{1,2} = 3, \lambda_3 = 2$$

⇓

$$v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⇓

A איננה לכסינה

ע"מ 84 תר' 2.7:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

א. לכסן את A (כלומר מצא את הפרוק הנדרש ל D אלכסונית ו P מלכסנת)

$$\lambda_{1,2} = 2, \quad \lambda_3 = 6$$

$$V_{\lambda_{1,2}} = sp \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_{\lambda_3} = sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

שימו לב לרשום את ה"ע P באותו סדר שהנחנו את ה"ע D, ואת אלו להניח בסדר ריבוי יורד

ב. חשב את A^n

$$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) = PD^n P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

2.10 תרגיל. תהא  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ . מצא את כל הערכים של a שעבורם המטריצה A לכסינה.

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & x & -a^2 \\ -1 & -4 & x \end{vmatrix} = (x-2)(x^2 - 4a^2) = (x-2)(x-2a)(x+2a)$$

אם שלושת הע"ע שונים אז כפי שהוכחנו בכיתה A וודאי לכסינה, לכן כבר בשלב זה ניתן לומר שעבור  $A$   $a \neq 1, -1, 0$  לכסינה. נראה מה קורה כשהיא כן שווה לאחד מהם:

$$a = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2, -2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = 0.5c, a = 2b - c = c - c = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0, b = -0.5c \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לא לכסינה

$$a = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן גם לא לכסינה

$$a = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = 2, 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & | & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = \frac{1}{3}c, a = 2b = \frac{2}{3}c \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0, b = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן גם לא לכסינה

**3.9 תרגיל.** א. יהיו  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  מטריצות דומות. הוכח:  $f_A(x) = f_B(x)$  (במילים: דמטריות דומות יש אותו פולינום אופייני).

ב. יהיו  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ , כך שאחת מהן לפחות הפיכה. הוכח:  $f_{AB}(x) = f_{BA}(x)$ . [רמז: (10)]

$$B = P^{-1}AP$$

$$\begin{aligned} f_B(\lambda) &= |\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP| = |P^{-1}\lambda P - P^{-1}AP| = \\ &= |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}||(\lambda I - A)||P| = |(\lambda I - A)| = f_A(\lambda) \end{aligned}$$

בה"כ נניח A הפיכה, אזי:

$$\begin{aligned} AB &= A(P^{-1}AP) \\ BA &= (P^{-1}AP)A = (A^{-1}A)(P^{-1}AP)A = A^{-1}(A(P^{-1}AP))A = A^{-1}(AB)A \\ &\Rightarrow BA \approx AB \Rightarrow f_{AB}(x) = f_{BA}(x) \end{aligned}$$

ע"מ 87 תר' 3.13:

א.  $A \in Mat_n(F)$  לכסינה. הוכח שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לנאריים ומצא גורמים אלו (רמז: למטריצות דומות אותו פולינום אופייני)

ב.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . הוכח ש A איננה לכסינה. האם זה סותר את א'?

A לכסינה  $\Leftarrow$  A דומה למטריצה אלכסונית שערכיה העצמיים באלכסונה הוכחנו בשעורים קודמים כי למטריצות דומות אותו פולינום אופייני ולכן הפולינום ש A יהיה זהה לזה של המטריצה האלכסונית אשר הוא מהצורה  $\prod (\lambda - \lambda_i)$  עבור כל  $\lambda_i$  איבר על אלכסונה.

ב.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . הוכח ש A איננה לכסינה. האם זה סותר את א'?

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2$$

$$A - 0I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = t, x_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר אין מספיק ו"ע לליכסון A. לא סותר כיוון שכיוון הגרירה הפוך

**3.15 תרגיל.** זוכרים את דני? עכשיו הוא חושב שיש לו הוכחה פשוטה למשפט קיילי-המילטון: תהא  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . לפי ההגדרה,  $f_A(x) = |A - xI|$ , לכן  $f_A(A) = |A - AI| = |A - A| = |O| = 0$ . מ.ש.ל. אבל דני בחור פיקח: הוא יודע ש  $f_A(A)$  צריכה להיות מטריצה, והוא קיבל סקלר! מה לא נכון בהוכחה של דני? [ראו: כיצד נראית המטריצה  $xI$ ? האם אפשר להציב A במקום  $x$  במטריצה זו?]

הטעות נובעת מהתייחסות למט' הסקלרית  $xI$  ככפל בין מטריצות. למעשה בהצבת A במקום x היא אמורה להופיע בכל רכיב באלכסון וליצור מטריצת בלוקים אלכסונית.

**3.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

האם היא ניתנת לשילוש? אם כן מצא את המשולשית לה היא דומה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$