88-341-01
ט"ו בשבט תשע"א
מרצה: ש. הורוביץ

מבחן באנליזה מודרנית 1
מועד א'

ענו על כל השאלות הבאות. כל הגדרה או ציטוט שווה 7 נקודות, וכל הוכחה שווה 10 נקודות. חומר עזר אסור. משך הבחינה שעתיים וחצי. בהצלחה!

1. א. הגדירו σ אלגברה, מרחב מדיד, ומידה על מרחב זה.
ב. הגדירו פונקציות מדידות.
ג. צטטו את משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג.
ד. צטטו את למת פאטו.
ה. הראו שמשפט ההתכנסות המונוטונית נובע מלמת פאטו. (בהרצאה הוכחנו את ההיפך.)

2. א. הגדירו פונקציה רציפה בהחלט על קטע ב- $\mathbb{R}$.
ב. צטטו את הכללת לבג ל"משפט היסודי של חשבון אינטגרלי "(שני חלקים.)
ג. תהי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג , ותהי I_E האינדקטור של E. הוכיחו שלכמעט כל $a \in E$ (ביחס למידת לבג)

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{[a-h,a+h]} I_E(x)dm = 1$$

3. א. אפיינו קבוצות מדידות ביחס למידת המכפילה uxv.
ב. צטטו את משפט טונלי.
ג. נניח ש- (X,S,u) ו- (Y,T,v) הם שני מרחבי מידה חיובית, כאשר המידות u ו- v שלימות ו σ - סופיות. כרגיל נגדיר את מידת המכפילה $w = uxv$. תהי $E \subset XxY$ מדידה dw, ותהי $w(E)=0$.
הוכיחו שלכמעט כל $x \in X$ הקבוצה $E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$ מקיימת

$$v(E_x) = 0$$

4. א. הגדירו מרחב הילברט.
ב. הגדירו ותנו שני אפיונים לבסיס אורתונורמלי למרחב הילברט.
ג. נניח ש- H מרחב הילברט מעל $\mathbb{R}$, ו- $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ הוא בסיס אורתונורמלי ל- H. עוד נניח ש- $T: H \to H$ ליניארי ורציף. הוכיחו ש-

$$\|T\|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2$$