בוחן בשיטות דיפרנציאליות ואינטגרליות 2: 83-114

הערות:

1. משך הבוחן: 90 דקות.
2. חומר עזר: מחשבון פשוט.

שאלה 1 (40 נק')

קבע האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט/בתנאי או מתבדרים.

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^3-5n^2+1}}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(3n+1)}$

פתרון שאלה 1

סעיף א:

נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי . הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר . נחשב את

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^3-5n^2+1}}}{\frac{3}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3\sqrt{n}+2\right)}{3\sqrt{n^3-5n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n\sqrt{n}+2n}{3\sqrt{n^3-5n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{\sqrt{n}}}{3\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}}}=1$$

לכן הנתון גם מתבדר.

סעיף ב:

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$a_n\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\ln(3n+1)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(3n+1)}=$$

נבחר את הטור ההרמוני המתבדר $b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. מאחר ומתקיים $b_n<a_n$ עפ"י מבחן ההשוואה הטור a_n מתבדר, ולכן אין התכנסות בהחלט.

נבדוק התכנסות בתנאי:

תנאי לייבניץ מתקיימים:

הסדרה יורדת והאיבר הכללי שואף לאפס.

ולכן הטור מתכנס בתנאי.

שאלה 2:

(אין קשר בין הסעיפים)

א. הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n^2}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2})$ מתכנס במ"ש בקטע $[-1,1]$.

ב. הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt[3]{n!}}(x^n-x^{-n})$ מתכנס במ"ש בקטע $[\frac{1}{3},3]$.

פתרון:

א. ראשית נבדוק למה מתכנס הטור נקודתית.

נשים לב שזהו טור טלסקופי, לכן:

$$
\begin{aligned}
s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k}{k^2}-\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\right) \\
&= x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\cdots+\frac{x^n}{n^2}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \\
&= x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}
\end{aligned}
$$

בתחום שלנו: $s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}(x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2})=x$

נבדוק התכנסות במ"ש: $\sup_{x\in[-1,1]}|s_n(x)-x|=\sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right|=\frac{1}{(n+1)^2}\to 0$

מכאן שיש התכנסות במ"ש.

ב. ננסה לחסום בתחום הנתון את האיבר הכללי על ידי סדרה שהטור שלה מתכנס:

$$|\frac{n+1}{\sqrt[3]{n!}}(x^n-x^{-n})|\le\frac{n+1}{\sqrt[3]{n!}}\cdot 3^n$$

אם נראה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt[3]{n!}}\cdot 3^n$ מתכנס, סיימנו.

נשים לב כי זהו טור חיובי. נשתמש במבחן דלמבר:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\limsup_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{\sqrt[3]{(n+1)!}}\cdot 3^{n+1}}{\frac{n+1}{\sqrt[3]{n!}}\cdot 3^n}=\limsup_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\sqrt[3]{\frac{n!}{(n+1)!}}\cdot 3$$

$$=\limsup_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{n+1}}\cdot 3=0<1$$

ולכן הטור מתכנס.

סה"כ, לפי מבחן הM של ויירשטראס טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt[3]{n!}}(x^n-x^{-n})$ מתכנס במ"ש.

שאלה 3 (30 נק')

מצא את $f(x)$ כאשר $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3n+1)x^{3n}$, $|x|<1$.

פתרון שאלה 3

נשים לב כי :

$$\left((-1)^k x^{3k+1}\right)'=(-1)^k(3k+1)x^{3k}$$

$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(3k+1)x^{3k}$ זהו טור חזקות ומתכנס ברדיוס ההתכנסות $|x|<1$ ולכן טור הנגזרות מתכנס באותו רדיוס התכנסות והוא מתכנס במידה שווה בכל $[a,b]\subset(-1,1)$ ולכן לפי המשפט אפשר להחליף את סדר הנגזרת והסכום.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(3k+1)x^{3k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k x^{3k+1}\right)'=\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{3k+1}\right)'$$
$$=\left(x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{3k}\right)'$$

והרי הטור $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{3k}$ הוא סדרה הנדסית ($a_1=1, q=-x^3$) ולכן :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{3k}=\frac{1}{1+x^3}$$

ולכן נקבל :

$$\left(x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{3k}\right)'=\left(x\frac{1}{1+x^3}\right)'=\left(\frac{x}{1+x^3}\right)'=\frac{1+x^3-3x^3}{(1+x^3)^2}=\frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2}$$

ולכן סה"כ קיבלנו :

$$f(x)=\frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2}$$