תרגיל:

הוכיחו שכל תת חבורה נוצרת סופית של $\mathbb{Q}$ היא ציקלית

פתרון:

$$\left\langle \frac{a_1}{b_1} \dots \frac{a_n}{b_n} \right\rangle = \left\{ s_1 \cdot \frac{a_1}{b_1} + \dots + s_n \frac{a_n}{b_n} \;\middle|\; s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z} \right\}$$

נתחיל מ- $n=2$

$$\left\langle \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \right\rangle = \left\{ \frac{s_1 a_1}{b_1} + \frac{s_2 a_2}{b_2} \right\} = \left\{ \frac{s_1 a_1 b_2 + s_2 a_2 b_1}{b_1 b_2} \right\} = \left\langle \frac{(b_2 a_1, b_1 a_2)}{b_1 b_2} \right\rangle$$

נשים לב שבמונה יש צירוף לינארי של b_2a_1 ו-b_1a_2
ויכול להיות כל צירוף לינארי שלהם.
גם בעצם מקבלים מספרים מהצורה $\frac{k(b_2a_1,b_1a_2)}{b_1b_2}$ k שלם

באופן כללי. אנחנו יכולים להוריד כל פעם את מספר היוצרים ב-1. נמשיך כך עד שנקבל יוצר 1.

דוגמא:

$$\left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{12} \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{20}, \frac{2}{3} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{60} \right\rangle$$

חבורת שורשי היחידה:

שורשי היחידה מסדר n

$$\Omega_n = \{ x \in \mathbb{C},\ x^n = 1 \}$$

$$\Omega_n = \left\{ cis\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \;\middle|\; k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

$$\Omega_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$$

הוכיחו $\Omega_n \le \mathbb{C}\setminus\{0\}$

הוכחה:

1. נמצא איבר יחידה. $1\in\Omega_\infty$ כי לכל n $1\in\Omega_n$

כי לכל n $1^n=1$

2. סגירות. $x,y\in\Omega_\infty \Leftarrow x\in\Omega_n,\ y\in\Omega_m \Leftarrow x^n=1,\ y^m=1$

$$(xy)^{nm}=x^{nm}y^{nm}=(x^n)^m(y^m)^n=1 \Rightarrow xy\in\Omega_{nm}\subseteq\Omega_\infty$$

3. יהי $x\in\Omega_\infty$. קיים n כך ש $x^n=1$

$$(x^n)^{-1}=1 \Rightarrow (x^{-1})^n=1 \Rightarrow x^{-1}\in\Omega_n\subseteq\Omega_\infty$$

דרך נוספת: $x^n=1 \Leftarrow x^{-1}=x^{n-1}$ ראינו שיש סגירות לכפל ולכן אם $x\in\Omega_\infty$ אז $x^{n-1}\in\Omega_\infty$

שאלה:

האם Ω_n ציקלית? האם Ω_∞ ציקלית?

תשובה:

$$\Omega_n=\{cis(\tfrac{2\pi k}{n})\mid k=0,\dots,n-1\}$$

$k=1:\ cis\frac{2\pi}{n}$

$o(cis\frac{2\pi}{n})=n$ ולכן הוא יוצר את החבורה

Ω_∞ לא ציקלית. כי Ω_∞ היא אינסופית $(|\Omega_\infty|=\aleph_0)$

אבל כל איבר הוא מספר סופי.

שאלה:

האם Ω_∞ נוצרת סופית?

תשובה:

לא, נניח בשלילה ש-Ω_∞ נוצרת על ידי

$$\Omega_\infty = \langle cis\frac{2\pi k_1}{n_1}, \ldots, cis\frac{2\pi k_\ell}{n_\ell} \rangle$$

איבר כללי נראה כך: (החבורה אבלית)

$$cis\frac{2\pi k_1 m_1}{n_1} \cdot \ldots \cdot cis\frac{2\pi k_\ell m_\ell}{n_\ell} = cis\Big(\underbrace{\frac{2\pi k_1 m_1}{n_1} + \ldots + \frac{2\pi k_\ell m_\ell}{n_\ell}}\Big)$$

בסכום יופיעו רק זוויות שבמכנה שלהם יש ראשוניים שמשתתפים ב- $n_1, \ldots, n_\ell$

ציקלית בסתירה.

פתרון נוסף:

$$\Omega_\infty = \langle \rho_1, \ldots, \rho_n \rangle = \{\rho_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \rho_n^{k_n}\}$$

כל אחד מהאיברים הוא מסדר סופי, ולכן יש לו רק מס' סופי של חזקות שונות. לכן ע"י מספר סופי של איברים ניתן לייצר רק קבוצה סופית

הבהרה: חבורה נקראת מפותלת אם כל איבר בה הוא מסדר סופי

דוגמא:

Ω_∞ היא חבורה אינסופית מפותלת

תרגיל:

הוכיח ש- $\mathbb{R}$ לא נוצרת סופית

פתרון:

אם $|\mathbb{R}|=\aleph$ ו- $\mathbb{R}$ נוצרת על ידי

$$\mathbb{R}=\langle x_1,\ldots,x_n\rangle=\{\underbrace{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}_{\text{צירוף לינארי}}\}$$

המקדמים שלמים ולכן יש לנו $\aleph_0\cdot\aleph_0\cdot\ldots\cdot\aleph_0=\aleph_0$ אפשרויות בסתירה

באופן כללי: חבורה נוצרת סופית היא בת מניה

החבורה הסימטרית:

החבורה הסימטרית מסדר n: $S_n=\{f:\{1,\ldots,n\}\xrightarrow{\text{הפיכות}}\{1,\ldots,n\}\}$

תמורות על המספרים $1,\ldots,n$

$|S_n|=n!$

דרך כתיבה של האיברים: $\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ f(1) & \cdots & f(n)\end{pmatrix}$

הכפלה = הרכבה של פונקציות

דוגמה:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

לכל $n\geq 3$ S_n אינה אבלית

הגדרה:

מחזור מאורך m $(i_1,\ldots,i_m)$ מתאר את הפונ' ששולחת את i_k ל- $i_{k+1 \bmod n}$ ואת כל שאר האיברים לעצמם

דוגמה:

$(1,2,5)$ ב- S_5 $\qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&3&4&1\end{pmatrix}$

טענה:

כל תמורה ניתן לכתוב כמכפלה של מחזורים זרים

למשל:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&7&5&3&4&1&6\end{pmatrix} = (1,2,7,6)(3,5,4)$$

טענות:

1) כל שני מחזורים זרים מתחלפים

2) הסדר של מחזור מאורך m הוא m

3) הסדר של מכפלה של מחזורים זרים הוא ה lcm של הסדרים

הוכחה של 3:

טענת עזר: יהיו $a,b\in G$ כך ש $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=e$ ו- $ab=ba$

אז $O(ab)=lcm(O(a),O(b))$

הוכחה: נסמן $O(a)=n, O(b)=m$

$$(ab)^{lcm(n,m)} = a^{lcm(n,m)}b^{lcm(n,m)}=e$$

וגם

$$(ab)^k=e$$

$$(ab)^k=a^kb^k \Rightarrow \underbrace{a^k}_{\langle a\rangle}=\underbrace{(b^k)^{-1}}_{\langle b\rangle}$$

$$\Downarrow$$

$$a^k=e \quad (b^k)^{-1}=e$$

$$\Downarrow$$

$$n,m\mid k \Rightarrow lcm(n,m)\mid k$$

בחזרה להוכחת 3:

אם $\sigma=(a_1,\dots,a_k)$, $\tau=(b_1,\dots,b_l)$ מחזורים זרים

אז הם מתחלפים. האיברים היחידים ש σ "מזיז" הם $a_1,\dots,a_k$

ולכן החזקות של σ מזיזות רק איברים בתוך הקבוצה הנ"ל

כנ"ל לגבי τ. ולכן, ההצגה המשותפת היחידה היא ההצגה שלו
מכילה שום איבר שהוא בעצם איבר היחידה

ולכן, $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle = \{e\}$

תרגיל:

מצאו איבר מסדר 45 ב- S_{15}

פתרון:

$$\underbrace{(1,2,3,4,5)}_{5}\underbrace{(6,7,8,9,10,11,12,13,14,15)}_{9}$$

תרגיל:

האם יש איבר מסדר 39 ב- S_{15}?

פתרון:

יש 2 דרכים ליצירת תמורה מסדר 39

I. מחזור מאורך 39

II. להכפיל מחזורים זרים מאורך 13 ו- 3

את שתיהן לא ניתן לעשות ב- S_{15}.

תרגיל:

מצאו את כל הסדרים האפשריים ב- S_5

פתרון:

1- איבר היחידה

2- מחזור מאורך 2

3- מחזור מאורך 3

4- מחזור מאורך 4

5- מחזור מאורך 5

6- מחזורים מאורך 2 ו- 3

ב S_n יכולים להיות סדרים שגדולים מ-n

הגדרה: מחזור מאורך 2 נקרא חילוף

טענה:

ניתן לכתוב כל תמורה כמכפלה של חילופים (ולאו בהכרח זרים)

הוכחה:

כל תמורה ניתן לכתוב כמכפלה של מחזורים

$$(a_1,\dots,a_r)=(a_1,a_2)(a_2,a_3)\dots(a_{r-1},a_r)$$

שאלה קומבינטורית:

כמה מחזורים מאורך r יש ב-S_n?

פתרון:

$$\binom{n}{r}\frac{r!}{r}=\binom{n}{r}(r-1)!$$

$(1,2,3)=(3,1,2)=(2,3,1)$

קוסטים:

תהי חבורה G ו- $H\le G$. H משרה יחס שקילות על G

באופן הבא: $a,b\in G$, $a\sim_H b$ אם $ab^{-1}\in H$ (מימין)

בגלל ש H תת חבורה $b\in H \iff b^{-1}\in H$ לכן, באופן שקול

נוכל לומר ש $ba^{-1}\in H$

במילים אחרות:

קיים $h\in H$ כך ש $ab^{-1}=h$ כלומר $a=hb$

ניתן להגדיר באופן דומה יחס שקילות מהצד השני. כלומר,

$a\sim b \iff \exists h\in H: a=bh$ (משמאל)

מחלקות השקילות ביחס ליחסי השקילות הנ"ל נקראות קוסטים.

קוסטים ימניים: $[a]=\{b\mid b\sim a\}=\{h^{-1}a : h\in H\}=Ha$

קוסטים שמאליים: $[a]_{\text{שמאל}}=aH$