

תרגילי חזרה - תורת החבורות

1. איזה מהמשפטים הבאים נכון: כל חבורה מסדר K פשוטה. אין חבורה פשוטה מסדר K . חלק מהחבורות מסדר K פשוטות וחלק אינן פשוטות.
 - א. עבור $K=45, 46, 47$. ב. כנ"ל עבור $K=6, 60$.
2. נתון הומו' $\varphi: G \rightarrow H$. הוכח או הפרך: $\text{Im } \varphi \triangleleft H$.
 3. (א) נתונות שבע חבורות מסדר 60. זהו אילו איזומורפיות אחת לשניה: $Z_6 \times Z_{10}, Z_{60}, \langle (2\ 3), (1\ 4\ 5) \rangle \times Z_2 \times Z_5$, $\langle (2\ 3), (1\ 2\ 3) \rangle \times Z_{10}, V \times Z_{15}, Z_5 \times D_3 \times U_3, A_5$
 - (ב) הוכיחו ש- U_{14} איזומורפית ל- U_{18} . (ג) האם U_{11} איזומורפית ל- U_{22} ?
4. מיינ את כל החבורות הסופיות מסדר K , עבור $K=62, 65, 49$.
5. תהא A_5 חבורת התמורות הזוגיות על 5 אותיות..
 - (א) כמה אברים מסדר 3 יש ב- A_5 ? (ב) כמה חבורות 3-סילוא יש ב- A_5 ?
 - (ג) תהא H תת חבורה 2-סילוא של A_5 . מצא לאיזו חבורה H איזומורפית.
6. הוכח: חבורת הממשיים החיבורית $(\mathbb{R}, +, 0)$ אינה נוצרת סופית.
7. כמה איברים מתחלפים עם התמורה $a := (2, 6, 5, 3)$ בחבורה S_9 ?
8. האם כל חבורה מסדר K אבלית? עבור $K=15, 16$.
9. הוכח: אם $H \leq G$ תת-חבורה מאינדקס סופי $([G:H] < \infty)$, אזי מספר הת"ח שצמודות ל H הוא סופי.
10. הוכח: תת-חבורה מאינדקס 2 היא ת"ח נורמלית.
11. הוכח או הפרך: (א) אם $G/Z(G)$ אבלית, אזי G אבלית. (ב) אם H תת חבורה של G ו- H ציקלית אז H נורמלית ב- G .
12. יהי f אוטומורפיזם של חבורת התמורות S_n . הוכח או הפרך: f שומר על התמורות הזוגיות.
13. יהא p מספר ראשוני.
 - (א) מצא את כל תתי-חבורות סילוא של החבורה הדיהדרלית מסדר $2p$.
 - (ב) מצא את כל תתי החבורות הנורמליות של חבורה זו.
14. א. מצא את כל החבורות מסדר 14. ב. מצא את כל סדרי תתי-החבורות של חבורה מסדר 14. ג. מצא את כל תתי החבורות של חבורה מסדר 14.

15. תהינה $M, N \triangleleft G$ שמקיימות $N \cap M = \{e\}$. הוכח: כי לכל $n \in N, m \in M$ מתקיים $nm = mn$.

16. הוכח או הפרך: כל חבורה מסדר : (א) 119 (ב) 120 (ג) 121 (ד) 122 (ה) 123 (ו) 125 היא חבורה פתירה.

17. (א) מצא את כל החבורות הסופיות להן שתי מחלקות צמידות.
 (ב) מצא את כל החבורות האבליות שיש להן 3 מחלקות צמידות.
 (ג) מצא חבורה לא אבלית שיש לה 3 מחלקות צמידות.

18. יהי f הומומורפיזם מחבורה G לחבורה אבלית A .
 הוכח: $\text{Ker } f$ מכילה את תת-חבורת הקומוטטור G' .

19. הוכח: חבורת התמורות S_n נוצרת ע"י שני אברים.

20. הראה $GL_n(\mathbb{R})$ אינה חבורה פשוטה. (רמז: מצא את המרכז).

21. א. חשב את כל סדרות ההרכב של החבורה הציקלית Z_{30} .
 ב. חשב את כל סדרות ההרכב של החבורה הדיהדרלית D_{15} .

22. הוכח: כל חבורת- p פתירה.

23. תהי G חבורה מסדר 17 הפועלת על קבוצה X מסדר 19. הוכיחו שיש נקודות שבת.

24. (א) הוכח: קיים אפימורפיזם $Z \times Z \rightarrow Z_{100} \times Z_{33} \times U_7$?
 (ב) האם קיים מונומורפיזם $Z_{21} \rightarrow A_{10}$? (רמז: התבונן בסדרי אברים).

25. נניח שקיים אפימורפיזם מ- S_5 לחבורה G . מצא את G (מיין את האפשרויות עד כדי איזומורפיזם).

26. עבור חבורה נוצרת סופית G , נגדיר דרגה של חבורה:
 $rank(G) := \min\{r \in \mathbb{N} \mid G = \langle g_1, g_2, \dots, g_r \rangle\}$ (מספר מינימלי של אברים בקבוצת יוצרים).
 א. תן דוגמא לחבורות (אבליות ושאינן אבליות) עם $rank(G)=2$.
 ב. הוכח: לכל חבורה סופית X קיימת חבורה G עם $rank(G)=2$ כך ש X איזומורפית לתת חבורה של G . (הדרכה: השתמש במשפט קיילי).

27. חשבו את המסלולים, מייצבים ונקודות השבת של הפעולות הבאות:
 א. חבורה ציקלית סופית פועלת על עצמה ע"י הצמדה.
 ב. חבורה ציקלית סופית פועלת על עצמה ע"י כפל משמאל.

28. תהי $H \leq G$ הראו ש $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} \triangleleft G$.

29. מצא את כל תתי-החבורות וחבורות מנה (עד כדי איזומורפיזם) של (א) $Z_4 \times Z_7$. (ב) D_4 .

בהצלחה!