תורת הקבוצות, מועד א, תשפא.

מרצה: תמר בר-און
מתרגל: רועי שליו.
משך המבחן: שעתיים.
חומר עזר: אסור.

1. נסמן ב$<_{\mathbb{Q}}$ את הסדר הלינארי הרגיל על $\mathbb{Q}$, וב$<_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}$ את הסדר המילוני על $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. כלומר,

$$(a,b) <_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} (c,d) \iff (b <_{\mathbb{Q}} d) \vee ((b=d) \wedge a <_{\mathbb{Q}} c)$$

הוכיחו/הפריכו: $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}) \cong (\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})$ (איזומורפיזם סדר)

2. הוכיחו שω^2 הוא הסודר המינימלי שמקיים $\omega+\alpha=\alpha$

3. תהי $f:[\omega_1]^{<\omega}\to\omega_1$. נגדיר את C_fלהיות הקבוצה של כל ה$\alpha\in\omega_1$ כך שלכל כך שלכל קבוצה סופית של איברים $\beta_1,...,\beta_n$ שקטנים מα, מתקיים $f(\beta_1,...,\beta_n)<\alpha$. כלומר:

$$C_f=\{\alpha\in\omega_1 : \beta_1,..,\beta_n<\alpha \Longrightarrow f(\beta_1,..,\beta_n)<\alpha\}$$

הוכיחו שC_f היא סל"ח.

4. נגדיר ברקורסיה על ON את הסדרה הבאה:
$\beth_0=\omega$
$\beth_{\alpha+1}=\beth_\alpha^{cof(\beth_\alpha)}$
עבור סודר גבולי $\beta\neq 0$, $\beth_\beta=\sup_{\alpha<\beta}\beth_\alpha$
הוכיחו שקיים סודר α כך ש$\alpha=\beth_\alpha$.

5. הוכיחו כי לא קיים מונה κ המקיים $2^\kappa=\aleph_{\aleph_{\omega^2}}$

6. יהיו $(A,<_A),(B,<_B)$ קס"חים לא ריקים. נגדיר על $A\times B$ את יחס הסדר הבא:

$$(a,b) <_{A\times B} (c,d) \iff a <_A c \wedge b <_B d$$

(א) הפריכו את הטענה הבאה:

$$cof(A \times B, <_{A \times B}) = \max\{cof(A, <_A), cof(B, <_B)\}$$

(ב) נניח שלפחות לאחת מהקבוצות A ו-B יש קופינליות אינסופית. הוכיחו

$$cof(A \times B, <_{A \times B}) = \max\{cof(A, <_A), cof(B, <_B)\}$$