# הרצאה 6

נכתב על ידי יהונתן רגב

**משפט**

תהי $A_{n\times n}$ מטריצה כך ש - $p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.

$A$ לכסינה $\leftrightarrow$ לכל ערך עצמי $\lambda$ של $A$ מתקיים $m_\lambda = k_\lambda$.

**הוכחה**

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח ש - $A$ לכסינה. אזי, קיים בסיס $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ של $\mathbb{F}^n$ המורכב מווקטורים עצמיים של $A$.

נחלק את האיברים של $B$ לקבוצות המתאימות לערכים עצמיים שונים $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ של $A$.

($m_{\lambda_1}=\dim V_{\lambda_1}$).

לכן, $n \le m_{\lambda_1}+\dots+m_{\lambda_s}$. מצד שני, $m_{\lambda_1}\le k_{\lambda_1}$, $m_{\lambda_s}\le k_{\lambda_s}$, לכן:

$n \le m_{\lambda_1}+\dots+m_{\lambda_s} \le k_{\lambda_1}+\dots+k_{\lambda_n} =^* n$.

*הערה: $p_A(x)$ מתפרק לחלוטין.

לכן, $m_{\lambda_1}+\dots+m_{\lambda_s}=k_{\lambda_1}+\dots+k_{\lambda_s}$, לכן $m_{\lambda_1}=k_{\lambda_1},\dots,m_{\lambda_s}=k_{\lambda_s}$.

$\boxed{\Rightarrow}$

נניח שלכל $\lambda_i$ מתקיים $m_{\lambda_i}=k_{\lambda_i}$ ($1\le i\le s$).

נתבונן במרחבים העצמיים: $V_{\lambda_1},\dots,V_{\lambda_s}$. לכל $1\le i\le s$ מתקיים $\dim V_{\lambda_i}=m_{\lambda_i}=k_{\lambda_i}$.

בכל אחד מ-$V_{\lambda_i}$ נבחר בסיס $B_i$. נגדיר: $B=B_1\cup\dots\cup B_s$.

$|B| = m_{\lambda_1}+\dots+m_{\lambda_s}=k_{\lambda_1}+\dots+k_{\lambda_s}=n$.

נסמן $B_1=\left\{v_1,\dots,v_{k_{\lambda_1}}\right\}, B_2=\left\{w_1,\dots,w_{k_{\lambda_2}}\right\},\dots,B_s=\left\{u_1,\dots,u_{k_{\lambda_s}}\right\}$.

לכן, $B$ בסיס ולכן לפי הקריטריון הכללי $A$ לכסינה.

■

**הערה**

1. אם A לכסינה אזי בהכרח $p_A(x)$ מתפרקת לחלוטין.

**הוכחה:** נניח $A$ לכסינה, לכן: $A\sim\mathfrak{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$. לכן:

$$p_A(x)=p_{\mathfrak{D}}(x)=\det\left(xI-\mathfrak{D}\right)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$$

2. יהי $T: v\to v$ כך ש- $p_T(x)$ מתפרק לחלוטין. אזי $T$ ניתן ללכסון $\leftrightarrow$ לכל ערך עצמי $\lambda$ של $T$ מתקיים $m_\lambda=k_\lambda$.

3. יהי $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אזי מתקיים המשפט היסודי של אלגברה: כל פולינום מעל המרוכבים מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים.

נכתב על ידי יהונתן רגב

# שילוש

**הגדרה**

אומרים שמטריצה $A$ **שלישה (ניתנת לשילוש)** אם היא דומה למטריצה משולשת עליונה.

**הערה**

מטריצה משולשת עליונה דומה למטריצה משולשת תחתונה.

**הוכחה**

תהי $A=\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & * \end{pmatrix}$ (משולשית עליונה). נגדיר $P=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ נוכיח ש-$P^{-1}AP$ משולשית תחתונה. $P^{-1}=P$ (**תרגיל:** להוכיח. רמז: $P^2=I$).

$$P\cdot A\cdot P=P\cdot A\cdot(e_ne_{n-1}\dots e_1)$$

$$P\cdot A\cdot P=P\cdot(A\cdot e_nA\cdot e_{n-1}\dots A\cdot e_1)$$

$$P\cdot A\cdot P=P\cdot(v_n\, v_{n-1}\cdots\, v_1)$$

$$P\cdot A\cdot P=P\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & 0 \\ * & * & \iddots & \vdots \\ * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}:=\mathrm{A}'=\begin{pmatrix} {v_1}' \\ . \\ \vdots \\ {v_n}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_n \\ e_{n-1} \\ \vdots \\ e_1 \end{pmatrix}A'=\begin{pmatrix} * & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

■

**משפט (קריטריון שילוש)**

מטריצה $A_{n\times n}$ ניתנת לשילוש אם ורק אם הפולינום האופייני $p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים.

**הוכחה**

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח ש - $A$ ניתנת לשילוש. לכן: $A\sim\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. נחשב:

$$p_A(x)=\det\left(xI-\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\right)$$

$$p_A(x)=\det(\begin{pmatrix} \mathrm{x}-\lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x-\lambda_n \end{pmatrix}$$

$$p_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)$$

וזו מכפלה של גורמים לינאריים.

$\boxed{\Rightarrow}$

נניח שהפולינום האופייני $p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. לכן:

$p_A(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)$. נסמן $\lambda = \lambda_1$. נבחר וקטור עצמי $v$ המתאים ל - $\lambda$. נשלים את הקבוצה $S = \{v\}$ עד בסיס $B$ של $\mathbb{F}^n$: $\mathrm{B} = \{v = v_1, v_2, .., v_n\}$. נגדיר $P = \{v_1 v_2 \ldots v_n\}$.

$P$ הפיכה שכן עמודותיה בת"ל. נתבונן במטריצה $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

$$A' = \mathrm{P}^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot (v_1\, v_2\, \cdots\, v_n) = P^{-1} \cdot (A \cdot v_1\; A \cdot v_2 \cdots A \cdot v_n)$$

$$A' = P^{-1} \cdot (\lambda_1 \cdot v_1 * \cdots *) = (P^{-1} \cdot \lambda_1 \cdot\; v_1 * \cdots *)$$

$$A' = (\lambda_1 \cdot (P^{-1} \cdot v_1) * \cdots *) = (\lambda_1 \cdot e_1 * \cdots *) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & A_1 & \ddots & \mathrm{A}_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathrm{A}_1 & \ldots & \mathrm{A}_1 \end{pmatrix}$$

כעת, נשתמש באינדוקציה על $n$.

<u>בסיס</u>: $n = 1$ - אין מה להוכיח.

<u>צעד</u>: נניח נכונות המשפט עבור $n-1$. נוכיח נכונות המשפט עבור $n$.

נתבונן בפולינום האופייני:

$$p_A(x) = p_{A'}(x) = \det(xI - A') = (x-\lambda_1)\det(xI - A_1) = (x-\lambda_1) \cdot p_{A_1}(x)$$

$p_{A_1}(x)$ מתפרקת לחלוטין (שכן $p_A(x)$ מתפרק לחלוטין), לכן, לפי הנחת האינדוקציה, $A_1$ ניתנת לשילוש. ז"א, קיימת $Q$ כך ש - $Q^{-1}A_1Q$ משולשת עליונה.

נגדיר: $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Q & \ddots & \mathrm{Q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathrm{Q} & \ldots & \mathrm{Q} \end{pmatrix}$.

(**תרגיל בית:** לבדוק ש $R^{-1}A'R$ משולשית).

■