נכתב על ידי נועם יערי

מוסכמה

נקודות a בהן מחשבים את גבולות $\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$ הן נקודות הצטברות של תחום הפונקציה.

למה

א. $\lim_{x\to a} c = c$

ב. אם $\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{x\to a} g(x) = c$ אזי:

1. $\lim_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = b \pm c$
2. $\lim_{x\to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = b \cdot c$
3. $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{b}{c}$

כאשר הביטויים מימן מוגדרים היטב. (למשל: $c \neq 0$ בסעיף 3)

ג. סנדוויץ': אם $b \overset{x\to a}{\leftarrow} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \overset{x\to a}{\to} b$ אזי $\lim_{x\to a} g(x) = b$.

הוכחה

כל הטענות נובעות מאפיון הגבול בעזרת סדרות, והמשפט המקביל עבור סדרות.

למשל (ג) – תהי $dom(g) \ni \overset{\neq a}{a_n} \to a$.

$$b \overset{x\to a}{\leftarrow} f(a_n) \leq g(a_n) \leq h(a_n) \overset{x\to a}{\to} b$$

מהאפיון לפי סדרות. מסנדוויץ' עבור סדרות נקבל $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = b$.

■

למה

אם $b \overset{x\to a}{\to} f(x) \neq b$, $c \overset{x\to b}{\to} g(x)$ (b נקודת הצטברות של $dom(g) \cap im(f)$) אז $g\left(f(x)\right) \overset{x\to a}{\to} c$

הוכחה

נוכיח עבור ההנחה היותר חזקה, שהפונקציה g מוגדרת על סביבה של b. (**המקרה הכללי** –

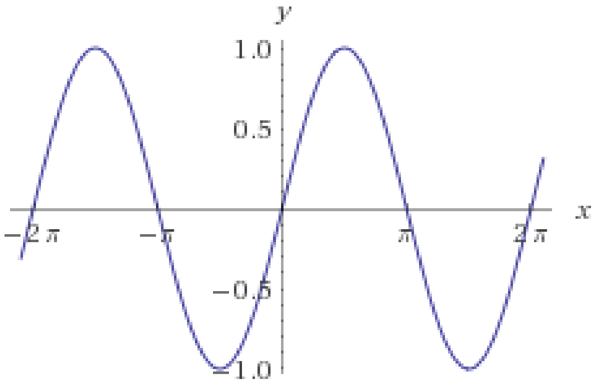
תרגיל) תהי $dom(g\cdot f) \ni \overset{\neq a}{a_n} \to a$. בפרט, $a_n \in dom(f)$. מהנתון, $dom(g) \ni \overset{\neq b}{f(a_n)} \to$ a (כי $a_n \in dom\ (g\cdot f)$). מהנתון השני, $g\left(f(a_n)\right) \to c$. ($a$ נ"ה של $dom(g\cdot f)$: מספיק להוכיח שיש סדרה $dom(g\cdot f) \ni \overset{\neq a}{a_n} \to a$. תהי $dom(f) \ni \overset{\neq a}{a_n} \to a$ (a נקודת הצטברות של $dom(f)$) $\Leftarrow b \to f(a_n) \neq b$. תהי U סביבה של b שבה g מוגדרת. לבסוף, $f(a_n) \in U$. יהי N כך ש - $f(a_N), f(a_{N+1}), \cdots \in U$. אז $a_N, a_{N+1}, \cdots \in dom(g\cdot f)$ והסדרה הזו שואפת ל - a).

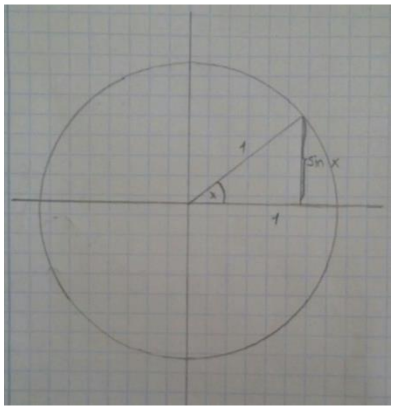
■

נכתב על ידי נועם יערי

דוגמה

$$\lim_{x\to 0}\sin(x)=0$$





שטח המשולש:

$$S_{\Delta}=\frac{(\cos(x)\cdot\sin(x))}{2}\le\frac{\sin(x)}{2}\le S_{\text{פלח}}=\pi\cdot 1^2\cdot\left(\frac{x}{2\pi}\right)=\frac{x}{2}$$

⇐ עבור $0\le x\le\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $0\le\sin(x)\le x$. עבור $-\frac{\pi}{2}<x\le 0$: $0\le -x<\frac{\pi}{2}$, לכן:

$$0\le\underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin(x)}\le -x$$

⇐ $x\le\sin(x)\le 0$.

לסיכום:

עבור $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$:

$$0\leftarrow -|x|\le\sin(x)_{\text{מסנדוויץ}\to 0}\le |x|\to 0$$

$$\sin(x)_{\text{ניצב}}\le c_{\text{יתר}}\le x_{\text{קשת על מיתר}}$$

בהגדרת הגבול $\lim_{x\to a}f(x)=b$, אפשר להגביל את x לסביבה W של a כרצוננו:

נניח שבהנתן סביבה V של b, יש סביבה U של a, המוכלת ב – W כך ש - $f(a)\in V$ לכל $a\in U$.

אז קיבלנו תכונה יותר חזקה מהדרוש.

דוגמה

$$\lim_{x\to 0}\cos(x)=1$$

$$\cos(x)=1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)_{\to 0}$$

$$\frac{x}{2}\to_{x\to 0}\left(\frac{0}{2}\right)=0$$

$$1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\to_{x\to 0}1\Leftarrow\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2}\to 0\cdot 0=0\Leftarrow\sin\left(\frac{x}{2}\right)\to_{x\to 0}0\Leftarrow_{\text{למה}}$$

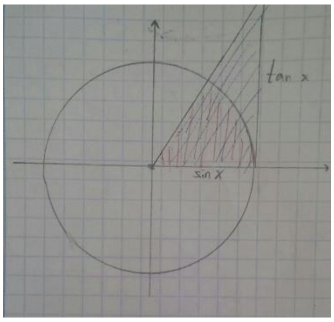
■

למה

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=1$$

מהשוואת שטחים,

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$



$$\frac{\sin x\cdot\cos x}{2}\le\frac{x}{2}\le\frac{\tan x\cdot 1}{2}=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$\Leftarrow$

$$1\overset{x\to 0}{\leftarrow}\cos x\le\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{\to 1\ \text{מסנדוויץ}}\le\frac{1}{\cos x}\overset{x\to 0}{\rightarrow}1$$

כאשר $x<0$:

$$\cos x\ge\frac{(\sin x)}{x}\ge\frac{1}{\cos x}$$

פורמלית, רואים :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

לכן $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$

הגדרה

פונקציה $f(x)$ היא **חסומה** בתחום A אם יש c כך ש - $|f(x)|<c$ לכל $x\in A$.

דוגמה

הפונקציה $\sin x$ חסומה (ע״י 2) בכל $\mathbb{R}$: $|\sin x|\le 1<2$.

הערה

$f(x)$ חסומה ב A – $\Leftrightarrow$ יש c_1,c_2 כך ש- $c_1<f(x)<c_2$ לכל $x\in A$.

למה

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה a. אם הגבול $\lim_{x\to a}f(x)$ קיים, אז יש סביבה של a שבה הפונקציה f חסומה.

הוכחה

ניקח למשל $\epsilon := 1$. יהי $b := \lim_{x\to a} f(x)$

אז יש $\delta > 0$ כך ש – $b - \epsilon < f(x) < b + \epsilon$ לכל $a \neq x \in (a-\delta, a+\delta)$. תכונה זו משתמרת כאשר מקטינים את δ. עבור δ קטן מספיק, הקבוצה $(a-\delta, a+\delta)$ מוכלת בסביבה של a שבה f מוגדרת.

(נניח f מוגדרת ב – $(a-\delta_1, a+\delta_2)$ ניקח אפוא $\delta \leq \delta_1$ ואז

$(a-\delta, a+\delta) \subseteq (a-\delta_1, a+\delta_1) \subseteq dom(f)$

ניקח: $c := \max\{|b-1|, |b+1|, |f(a)|+1\}$.

לכל $x \in (a-\delta, a+\delta)$: אם $x \neq a$:

$|f(x)| < \max\{|b-\epsilon|, |b+\epsilon|\} \leq c$ ואם $x = a$:

$$|f(x)| = |f(a)| < |f(a)| + 1 \leq c$$

■