תרגיל 12

1. מצאו דוגמה של מרחב קומפקטי והאוסדורפי שאינו מטריזבילי
<u>פתרון:</u>

נסתכל על $\{0,1\}^{\aleph}$ עם טופולוגיית המכפלה. ראשית, ברור שזה מרחב קומפקטי והאוסדרופי כמכפלה של מרחבים קומפקטים והאוסדורפים (השתמשנו במשפט טיכונוף כאן). לכל $\alpha \in \aleph$ נסתכל על ההטלה $\pi_\alpha : \{0,1\}^{\aleph} \to \{0,1\}$. אז $\pi_\alpha^{-1}(\{0\})$ היא קבוצה סגוחה כתמונה הפוכה של קבוצה סגוחה. נשים לב שיש $\aleph$ קבוצות שונות כאלה $\{\pi_\alpha^{-1}(\{0\})\}_{\alpha\in\aleph}$. מנגד, ראינו בתרגול הקודם שלמרחב קומפקטי מטריזבילי יש כמות בת מניה של קבוצות סגוחות. מכאן שהמרחב הזה אינו מטריזבילי.

2. הראו שהמרחבים הבאים אינם קומפקטים מקומית:

(א) $\mathbb{Q}$

(ב) l_2

(ג) l_∞

<u>פתרון</u>

i. נראה של־$0 \in \mathbb{Q}$ אין אף סביבה קומפקטית. נניח בשלילה ש־$0 \in U \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}$ סביבה פתוחה של 0 שמוכלת בקבוצה קומפקטית. לפי הגדרת הטופולוגיה האוקלידית, קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־

$$\mathbb{Q} \cap (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$$

נבחר מספר אי רציונלי $r \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ (זה אפשרי כי הם צפופים ב־$\mathbb{R}$). לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר $q_n \in B(r, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}$ (אפשרי כי גם הרציונלים צפופים ב־$\mathbb{R}$). קל לראות ש־$\lim_{n\in\mathbb{N}} q_n = r$ ולכן גם כל תת סדרה של $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ תתכנס ל־r. מנגד, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$\{q_n\}_{N<n\in\mathbb{N}} \subseteq (-\varepsilon,\varepsilon) \subseteq U \subseteq K$ ולכן קיימת לה תת סדרה מתכנסת ל־$q \in \mathbb{Q}$ (כי K מרחב מטרי קומפקטי ולכן קומפקטי סדרתית). זו כמובן סתירה ולכן ל־0 אין אף סביבה קומפקטית מה שעושה את $\mathbb{Q}$ ללא קומפקטי מקומית.

ii. נראה של־$0 \in l_2$ אין סביבה קומפקטית. נניח בשלילה שקיימת $0 \in B(0,\varepsilon) \subseteq K \subseteq l_2$. נסתכל על הקבוצה $A = \{\frac{1}{2}\varepsilon e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(0,\varepsilon)$ כאשר $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ הוא הבסיס הסטנדרטי של l_2. נשים לב שלכל $i \neq j$ מתקיים ש־

$$\|\frac{1}{2}\varepsilon e_i - \frac{1}{2}\varepsilon e_j\| = \frac{1}{2}\varepsilon\|e_i - e_j\| = \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{2}$$

לכן, A לא יכולה להיות חסומה קליל (כי כל $\frac{1}{2}\varepsilon$־כיסוי שלה הוא בהכרח אינסופי). מנגד, K קומפקטית ולכן חסומה קליל ולכן גם A צריכה להיות כתת קבוצה שלה. סתירה

iii. טיעון כמעט זהה אבל

$$\|\frac{1}{2}\varepsilon e_i-\frac{1}{2}\varepsilon e_j\|=\frac{1}{2}\varepsilon\|e_i-e_j\|=\frac{1}{2}\varepsilon$$

3. <u>קומפקטיפיקציית חד נקודתית $(Alexandroff)$</u>: תהי (X,τ) האוסדורפי וקומפקטי מקומית שאינו קומפקטי. נגדיר $X^*:=X\cup\{\infty\}$ ואת הטופולוגיה

$$\tau^*:=\tau\cup\{X^*\setminus K\mid K\subseteq X\text{ is compact}\}$$

(א) הוכיחו שזה אכן מרחב טופולוגי.

(ב) הוכיחו ש־(X^*,τ^*) קומפקטי.

(ג) הוכיחו ש־(X^*,τ^*) האוסדורפי.

(ד) הוכיחו שפונקציית ההכלה $i:X\to X^*$ היא שיכון טופולוגי.

(ה) הוכיחו ש־$X\subseteq X^*$ צפוף.

(ו) הראו שהדרישה ש־(X,τ) קומפקטי מקומית הכרחית כדי ש־(X^*,τ^*) יהיה האוסדורפי.

<u>פתרון:</u>

i. נראה את שתכונות הטופולוגיה מתקיימות:

א'. ראשית נשים לב ש־$\emptyset\in\tau\subseteq\tau^*$. בנוסף $X^*\in\tau$ כי $X^*=X^*\setminus\emptyset$ ו־$\emptyset$ קומפקטית.

ב'. חיתוך כל שהוא של סגורות: לפי הגדרת הטופולוגיה, הקבוצות הסגורות הן איחודים של קבוצות סגורות ב־X יחד עם ∞ וגם קבוצות קומפקטיות. נניח ש־$\{F_i\}_{i\in I}$ הוא אוסף קבוצות סגורות ב־X^*. אם קיים i כך ש $F_i\subseteq X$ אז היא בהכרח קומפקטית וגם $\cap_{i\in I}F_i=\cap_{i\in I}\left(F_i\setminus\{\infty\}\right)$. זה חיתוך של סגורות ב X ולכן סגורה ב X. בנוסף, החיתוך מוכל ב F_i שקומפקטית ב X ולכן החיתוך גם הוא קומפקטי ב X ולכן סגור ב־X^*. אחרת, לכל i מתקיים כי $F_i=S_i\cup\{\infty\}$ עבור S_i סגורה ב X ולכן $\cap F_i=(\cap S_i)\cup\{\infty\}$ שזה איחוד של קבוצה סגורה ב X (היינו $\cap S_i$ כחיתוך של סגורות) עם $\{\infty\}$ ולכן סגור.

ג'. איחוד של סגורות F_1,F_2: אם $F_1,F_2\subseteq X$ אזי הם קומפקטים ואיחוד סופי של קומפקטים הוא קומפקטי. אחרת $F_1\cup F_2=(F_1\setminus\{\infty\})\cup(F_2\setminus\{\infty\})\cup\{\infty\}$ שאלו איחוד סופי של סגורות ב X (ולכן סגורה ב X) איחוד עם $\{\infty\}$ ולכן סגור ב $\hat{X}$.

ii. נראה ש־$\neg IP\Rightarrow\neg FIP$. יהיו $\{F_i\}_{i\in I}$ סגורות כך ש $\cap F_i$ ריק. אם קיים i כך ש $F_i\subseteq X$ קומפקטי אזי $\{F_j\cap F_i\}_{j\in I}$ אוסף של קבוצות סגורות ב F_i שהחיתוך שלהם ריק ולכן יש חיתוך סופי $\bigcap\left(F_{j_k}\cap F_i\right)$ שהוא ריק וזהו גם חיתוך סופי ומהקבוצות $\{F_i\}$. אחרת, לכל i מתקיים כי $F_i=S_i\cup\{\infty\}$ ואז החיתוך שלהם מכיל לפחות את $\{\infty\}$ ולא ריק.

iii. נתון X קומפקטי מקומית. צ"ל X^* הוא T_2. יהיו $x_1\neq x_2$. אם שניהם ב X אזי אפשר להפריד אותך עם קבוצות זרות פתוחות ב X והם יהיו גם

פתוחות ב X^*. אחרת, בה"כ $x_2 = \infty$. אז $x_1 \in X$. מכיוון ש X קומפקטי מקומית, יש קבוצה קומפטית K וקבוצה פתוחה U ב־X כך ש$x \in U \subseteq K$. לפי הגדרת הטופולוגיה, U פתוח גם ב־X^*, ו$\infty \in K^c$ פתוח. אז U וK^c הן הסביבות המפרידות.

iv. נראה שהסגורות של X הם מהצורה חיתוך של X עם סגורה של X^*. מצד אחד, תהי S קבוצה סגורה ב־X. נסתכל על $F = S \cup \{\infty\}$. לפי הגדרה, F סגורה ב־X^*, ו־$F \cap X = S$. מצד שני, תהי F סגורה ב־X^* אז יש 2 אפשרויות. אם F קומפקטית ב־X, אז מכיוון ש־X האוסדורף זה אומר ש־F סגורה ב־X. וכמובן ש־$F \cap X = F$. אם F מהצורה של $S \cup \{\infty\}$, כאשר S סגורה אז $F \cap X = S$ שסגורה ב־X.

v. מתקיים כי $cl(X) \in \{X, X^*\}$ כי אלו שני הקבוצות היחידות המכילות את X. נניח בשלילה כי $cl(X) = X$ אזי X סגורה. אבל X אינו קומפקטי וגם לא מהצורה $S \cup \{\infty\}$.

vi. נניח ש־X^* הוא T_2. ונראה ש־X קומפקטי מקומי, לצורך כך יהא $x \in X$. קיימות סביבות פתוחות זרות כך ש $x \in V, \infty \in U$. לכן $x \in V \subseteq U^c$. U^c סגורה ב $\hat{X}$ ו $\infty \notin U^c$ ולכן היא קומפקטית ב X. כלומר, יש קבוצה קומפקטית ש־x נמצא בפנים שלה.

4. יהי $X := (-\infty, 1) \cup (2, 5)$, הראו ש־$X^* \simeq 8$ (הצורה 8, לא המספר).
<u>פתרון</u>

ראינו כבר שכל הקטעים הפתוחים ב־$\mathbb{R}$ הומיאומורפים ולכן נניח בה"כ ש־$X = (-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi)$. נסמן

$$C_{\pm 1} := \{z \in \mathbb{C} : |z \mp 1| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$$

נסתכל על 8 כעל המרחב $C_{-1} \cup C_1$ ונבנה $\varphi : X^* \to 8$ על ידי

$$\varphi(x) := \begin{cases} cis(x) - 1 & x \in (-2\pi, 0) \\ cis(\pi + x) + 1 & x \in (0, 2\pi) \\ 0 & x = \infty \end{cases}$$

קל לוודא שזו פונקציה חח"ע ועל. בנוסף, מכיוון ש־$(-2\pi, 0)$ ו־$(0, 2\pi)$ פתוחות וזרות קל לוודא ש־φ רציפה על X. נראה ש־φ רציפה גם ב־X^* $\infty \in$. יהי $\varepsilon > 0$. צריך למצוא קבוצה קומפקטית $K \subseteq X$ כך ש־$\varphi(K^c) \subseteq B(0, \varepsilon)$. נשים לב שלכל $x \in (0, 2\pi)$ מתקיים

$$|\varphi(x)| = |cis(\pi+x)+1| = |\cos(\pi+x)+1+i\sin(\pi+x)| = |1-\cos(x)-i\sin(x)| =$$

$$\sqrt{(1-\cos(x))^2 + \sin^2(x)}$$

מכיוון שמדובר בפונקציות רציפות, אפשר למצוא $\delta > 0$ כך שאם $0 < x < \delta$ אז $\sqrt{(1-\cos(x))^2 + \sin^2(x)} < \varepsilon$. לפי סימטריה של סינוס וקוסינוס, קל לראות גם שאם $2\pi - \delta < x < 2\pi$ אז אי השיוויון נכון גם כן. באופן דומה, אנחנו נגלה שאם $-\delta < x < 0$ או $-2\pi < x < -2\pi + \delta$ אז $|\varphi(x)| < \varepsilon$ גם כן. אנחנו יכולים להגדיר

$$K := [-2\pi + \delta, -\delta] \cup [\delta, 2\pi - \delta] \subseteq X$$

לפי היינה בורל זו קבוצה קומפקטית. בנוסף, לפי הבנייה שלנו מתקיים ש־

$$\varphi(K^c) \subseteq B(0,\varepsilon)$$

הראנו ש־φ רציפה בכל נקודה ולכן רציפה. בנוסף, X^* קומפקטי ו־8 האוסדורפי אז לפי משפט השיכון φ היא הומיאומורפיזם.

5. תארו את קומפקטיפיקציית אלכסנדרוף של מרחב דיסקרטי לא קומפקטי.
<u>פתרון</u>

אנחנו יודעים שתת קבוצות קומפקטיות של מרחב דיסקרטי הן הקבוצות הסופיות בלבד. לכן, אם (X,τ_{disc}) מרחב דיסקרטי אינסופי (כלומר, לא קומפקטי) אז

$$\tau^*_{disc} = \tau_{disc} \cup \{X^* \setminus F \mid |F| < \infty\}$$

כלומר, קבוצה פתוחה היא כל קבוצה שמוכלת ב־X או אחת שמכילה את ∞ ואת כל שאר האברים פרט למספר סופי (מזכיר קצת את הטופולוגיה הקו־סופית אבל לא בדיוק).

אם X בן מניה אז אנחנו מקבלים את הטופולוגיה של סדרה מתכנסת כאשר נקודת הגבול היא הנקודה באינסוף.

6. הראו שמרחב הוא קומפקטי מקומית והאוסדורפי אם ורק אם יש לו קומפקטיפיקציה חד נקודתית.
<u>פתרון</u>

ראינו בתרגיל 3 שלכל מרחב קומפקטי מקומית והאוסדורפי יש את קומפקטיפיקציית אלכסנדרוף. מנגד, נניח ש־$i : X \to X \cup \{\infty\}$ היא קומפקטיפיקציה חד נקודתית. לפי הגדרה $X \cup \infty$ הוא האוסדורפי ובפרט T_1. לכן $\{\infty\}$ קבוצה סגורה ו־X קבוצה פתוחה. מכיוון ש־$X \cup \{\infty\}$ קומפקטית היא בפרט קומפקטית מקומית ולכן גם כל קבוצה פתוחה שלה קומפקטית מקומית. כלומר, X קומפקטי מקומית.

7. הוכיחו או הפריכו: כל פונקציה רציפה והפיכה מ־$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא הומיאומורפיזם.
<u>פתרון:</u>

הוכחה: תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה והפיכה. נראה ש־f^{-1} גם רציפה. תהי $x \in \mathbb{R}$ ו־$\varepsilon > 0$. נסמן $y := f(x)$ ונמצא $\delta > 0$ כך ש־$B(y,\delta) \subseteq f(B(x,\varepsilon))$. נשים לב ש־$K := B[x, \frac{1}{2}\varepsilon] \subseteq B(x,\varepsilon)$ הוא קומפקטי. הצמצום $f_{|K} : K \to f(K)$ הוא פונקציה רציפה וחח"ע ממרחב קומפקטי למרחב האוסדורפי. לפי משפט השיכון $f_{|K}$ היא הומיאומורפיזם. K הוא קטע סגור ב־$\mathbb{R}$ ולכן כל תת קבוצה הומיאומורפית לו ב־$\mathbb{R}$ היא גם קטע סגור (ראינו את זה בתרגול של קשירות). כלומר, קיימים $a < y < b$ כך ש־$f(K) = [a,b]$ (שימו לב שאי השיוויונים החזקים נובעים מכך ש־f חח"ע). קל למצוא $\delta > 0$ כך ש־$B(y,\delta) \subseteq [a,b]$. סך הכל, מתקיים

$$B(y,\delta) \subseteq [a,b] = f(K) = f(B[x, \frac{1}{2}\varepsilon]) \subseteq f(B(x,\varepsilon))$$

ולכן f^{-1} רציפה כרצוי.

8. הוכיחו או הפריכו: אם X קומפקטי והאוסדורפי, $A \subseteq X$ סגורה ו־$f : A \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, אז קיימת $\widehat{f} : X \to \mathbb{R}$ כך ש־

$$\widehat{f}_{|A} = f$$

וגם

$$\sup_{x\in X}|\widehat{f}(x)| = \sup_{x\in A}|f(x)|$$

<u>פתרון:</u>

ראשית, נשים לב ש־A תת קבוצה סגורה במרחב קומפקטי ולכן קומפקטית בעצמה. לכן $f(A)$ היא קבוצה חסומה ב־$\mathbb{R}$. נסמן

$$M := \sup_{x\in A} f(x),\ \ m := \inf_{x\in A} f(x)$$

נגדיר $g : A \to [0,1]$ על ידי

$$g(x) := \frac{f(x)-m}{M-m}$$

ראינו שמרחב קומפקטי האוסדורפי הוא גם T_4 ולכן ניתן להפעיל את משפט $Tietze$ כדי למצוא $\widehat{g} : X \to [0,1]$ כך ש־$\widehat{g}_{|A} = g$. נגדיר כעת $\widehat{f} : X \to \mathbb{R}$ על ידי

$$\widehat{f}(x) := m + (M-m)\widehat{g}(x)$$

קל לראות ש־$\widehat{f}$ רציפה וגם ש־$\widehat{f}_{|A} = f$ כרצוי. לבסוף, נשים לב ש־

$$\sup_{x\in A} f(x) \le \sup_{x\in X} \widehat{f}(x) \le m + (M-m) = M = \sup_{x\in A} f(x) \Rightarrow$$

$$\sup_{x\in X} \widehat{f}(x) = \sup_{x\in A} f(x)$$

ובאופן דומה

$$\inf_{x\in X} \widehat{f}(x) = \inf_{x\in A} f(x)$$

סך הכל מתקבל ש־

$$\sup_{x\in X}|\widehat{f}(x)| = \sup_{x\in A}|f(x)|$$

כרצוי.

9. מצאו דוגמה למרחב טופולוגי לא האוסדורפי בו ישנו גבול יחיד לכל סדרה מתכנסת
<u>פתרון</u>

אפשר להסתכל על מרחב X לא בן מניה עם הטופולוגייה קו־מנייתית. ראינו שהסדרות היחידות שמתכנסות ב־(X,τ_{coc}) הם הסדרות הקבועות לבסוף. בפרט יש להן גבול יחיד. ומנגד, ראינו גם שזה לא מרחב האוסדורפי.