תרגיל 8

להגשה עד 15.1.17

שאלה 1

חשבו:

$$\int_0^1 \int_0^\infty \frac{y \arctan(xy)}{(1+x^2y^2)(1+y^2)} dydx$$

שאלה 2

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מדידה לבג. הוכיחו את השוויון:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dm(x) = \int_0^\infty m(\{x : |f(x)| \geq t\}) dm(t)$$

שאלה 3

תהי μ מידה סופית על $\mathbb{R}$. נגדיר $\alpha(x) = \mu((-\infty, x])$. הוכיחו כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(x+c) - \alpha(x)] dm(x) = c\mu(\mathbb{R})$$

שאלה 4

הוכיחו כי הפונקציות הרציפות צפופות ב $L^1(\mathbb{R})$. כלומר: אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית ביחס למידת לבג, אזי לכל $\epsilon > 0$ קיימת g רציפה כך ש $\|f - g\|_1 < \epsilon$.

שאלה 5

תהי: $S := \{s \mid s\colon X \to \mathbb{R} \text{ is simple (measurable), and } \mu(\{x \mid s(x) \neq 0\}) < \infty\}$. הוכיחו כי :

1. S מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$.
2. לכל $p \in [1, \infty)$: $S = \{t \mid t\colon X \to \mathbb{R} \text{ is simple, and } t \in L^p(\mu)\}$.
3. לכל $p \in [1, \infty)$, S צפופה ב $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$.

שאלה 6

נניח X מרחב טופולוגי, ו־ $\mathbb{B}(X) \subseteq \mathbb{A}$, ולכל V פתוחה לא ריקה מתקיים $\mu(V) > 0$.

הוכיחו כי אם $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ רציפות כך ש $f = g$ כב"מ־μ אז $f(x) = g(x)$ לכל $x \in X$,

והסיקו מכך כי לכל $f\colon X \to \mathbb{R}$ רציפה מתקיים:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

בהצלחה!!