אינפי 4 תרגול 1

30 במרץ 2015

עקומה (מסילה) היא פונקציה (רציפה) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. אפשר לתאר צורות רבות כתמונות של עקומות - פרמטריזציה שלהן.

לדוגמה:

1. קטע בין שתי נקודות a, b:

$$\gamma(t) = a(1-t) + bt, t \in [0,1]$$

2. מעגל קנוני עם רדיוס 1:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$$

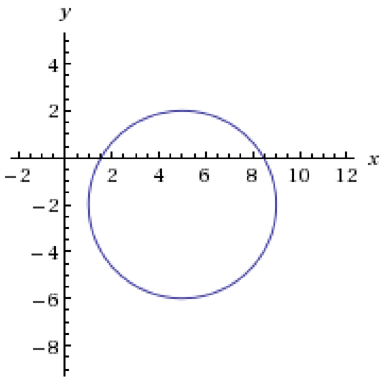
באופן כללי, מעגל עם רדיוס R שמרכזו בנקודה (a,b):

$$\gamma(t) = (a + R\cos t, b + R\sin t), t \in [0, 2\pi]$$

ומה יקרה אם נשנה את התחום? למשל, אם התחום יהיה $t \in [0, 4\pi]$ נקבל את אותו המעגל, אבל בכל נקודה בו העקומה עוברת פעמיים!

3. אליפסה עם מרכז בראשית הצירים ומוקדים a, b:

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t), t \in [0, 2\pi]$$



איור 1:

מעגל שמרכזו בנקודה $(5,-2)$ ורדיוסו 4.

4. מה יקרה אם במקום R בפרמטריזציה של המעגל נשים t? ה"רדיוס" כל הזמן משתנה ולכן נקבל ספירלה:

וקטור המשיק לעקומה γ הוא וקטור הנגזרות: $\gamma'(t)$.

עבור עקומה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ נגדיר כמה הגדרות:

א. עקומה נקראת **פשוטה** אם היא חח"ע. אינטואיטיבית, פירוש הדבר שהעקומה אינה חותכת את עצמה.

ב. עקומה נקראת **סגורה** אם $\gamma(a)=\gamma(b)$.

ג. עקומה נקראת **רגולרית** אם לכל t $\gamma'(t)\neq 0$.

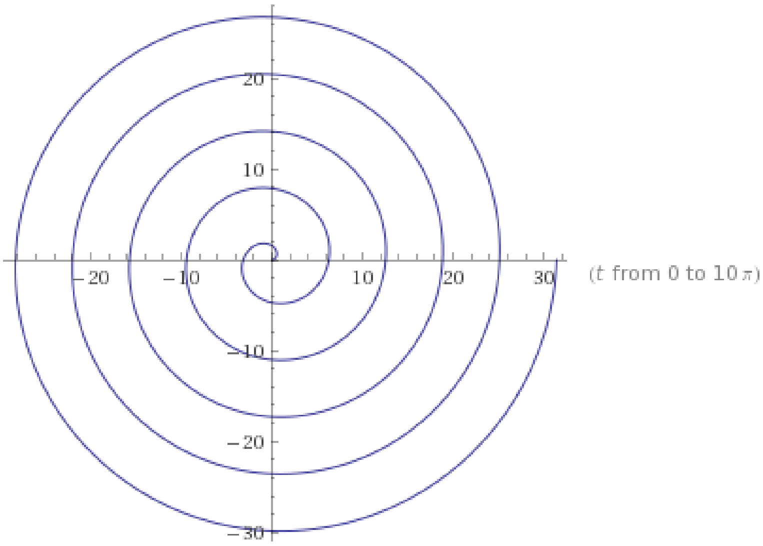
ד. עקומה נקראת **חלקה** אם היא גזירה ברציפות ורגולרית.

ה. עקומה נקראת **חלקה למקוטעין** (ובאופן דומה גזירה ברציפות למקוטעין) אם היא חלקה פרט למספר סופי של נקודות.

ו. נגדיר **אורך של עקומה** להיות:

$$L(\gamma)=\sup\left\{\sum_{k=0}^{n}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k+1})|\right\}$$

כאשר הסופרימום רץ על כל $n\in\mathbb{N}$ ועל כל חלוקה של הקטע $[a,b]$. למעשה, זהו הסופרימום של אורכי העקומות שמקרבות את γ המורכבות מקטעים ישרים (עקומות



איור 2:

ספירלה; העקומה $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t), t \in [0, 10\pi]$.

פוליגונליות).

עקומה שלה אורך סופי נקראת **עקומה בעלת אורך**.

אם העקומה שלנו חלקה, אפשר לחשב את אורכה ע"י הנוסחה:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את אורך העקומה $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ כאשר $t \in [0, 1]$.

<u>פתרון:</u>

קל לראות שהעקומה שלנו חלקה. וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$$

ולכן:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}$$

ואם כן האורך שלנו יהיה:

$$L(\gamma) = \int_0^1 (e^t + e^{-t})dt = e - \frac{1}{e}$$

<u>תרגיל:</u>

נגדיר $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ונגדיר עקומה $\gamma(t) = (t, f(t))$ כאשר $t \in [0,1]$. האם העקומה הנ"ל היא בעלת אורך?

<u>פתרון:</u>

לא. נשים לב שעבור $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$f(\frac{1}{k}) = \begin{cases} \frac{1}{k} & k = 2m \\ -\frac{1}{k} & k = 2m+1 \end{cases}$$

ונקבל:

$$||\gamma(\frac{1}{k}) - \gamma(\frac{1}{k+1})|| \geq |f(\frac{1}{k}) - f(\frac{1}{k+1})| \geq \frac{1}{k}$$

ואם נתבונן בחלוקות: $T_n : 0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{1}{2} < 1$ אורך הקו הפוליגונלי המתאים לחלוקה זו יהיה גדול מהסכום:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

שמתבדר לאינסוף כאשר $n \to \infty$. לכן המסילה אינה בעלת אורך.

אינפי 4 תרגול 2

30 במרץ 2015

הגדרה:

אינטגרל קווי (נקרא גם אינטגרל מסילתי או אינטגרל לאורך עקומה) מסוג ראשון של פונקציה $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ לאורך עקומה $\gamma:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ נתון ע"י הנוסחה:

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{a}^{b} f(\gamma(t)) \left\| \gamma'(t) \right\| dt$$

הצורך באינטגרל קווי עולה בעת ניתוח גדלים הקשורים בתנועה במסלול שאינו ישר, או בתכונות פיזיקליות של גוף עקום, כגון חוט דק.

בדרך זו ניתן לחשב גדלים כדוגמת אורך, מסה, או מטען חשמלי.

האינטגרל הקווי מחשב כוח הפועל על גוף המיוצג על ידי עקום, או עבודה של כוח המניע מסה לאורכו, כמו גם התנהגות של שדות פיזיקליים (למשל, שדה חשמלי) על פני מסלולים שונים.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1. של הפונקציה $f(x,y)=x+y$ לאורך משולש שקודקודיו הם $(0,0),(1,0),(0,1)$.

<u>פתרון:</u>

נגדיר פרמטריזציה לכל אחת מהצלעות:

$$\gamma_1(t)=(0,0)(1-t)+(1,0)t=(t,0)$$

$$\gamma_2(t) = (0,1)(1-t) + (1,0)t = (t, 1-t)$$

$$\gamma_3(t) = (0,0)(1-t) + (0,1)t = (0,t)$$

כאשר בכל אחת מהעקומות $t \in [0,1]$.

נקבל $\left\|\gamma_1'(t)\right\| = \left\|\gamma_3'(t)\right\| = 1, \left\|\gamma_2'(t)\right\| = \sqrt{2}$ ולכן:

$$\int\limits_\gamma f ds = \int\limits_0^1 f(\gamma_1(t))dt + \int\limits_0^1 f(\gamma_2(t))\sqrt{2}dt + \int\limits_0^1 f(\gamma_3(t))dt =$$

$$= \int\limits_0^1 tdt + \int\limits_0^1 \sqrt{2}dt + \int\limits_0^1 tdt = \sqrt{2}t + 2 \cdot \frac{t^2}{2}|_0^1 = \sqrt{2} + 1$$

2. של הפונקציה $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ לאורך קטע שקצוותיו $(0,0), (1,2)$.

<u>פתרון:</u>

נגדיר פרמטריזציה של הקטע:

$$\gamma(t) = (t, 2t), t \in [0,1]$$

מתקיים: $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{5}$.

לכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\int\limits_\gamma f ds = \int\limits_0^1 f(t,2t)\sqrt{5}dt = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{t^2+4t^2+4}}dt = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+\frac{4}{5}}}dt =$$

$$= \ln(t + \sqrt{t^2 + \frac{4}{5}})|_0^1 = \ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$$

3. של הפונקציה $f(x,y)=y$ לאורך קשת של ציקלואידה:

$$\gamma(t)=(a(t-\sin t),a(1-\cos t)),t\in[0,2\pi]$$

<u>פתרון:</u>

מהגדרת העקומה נקבל:

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{(a-a\cos t)^2+(a\sin t)^2}=a\sqrt{2-2\cos t}=\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}$$

ולכן האינטגרל הוא:

$$\int\limits_{\gamma} fds=\int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}dt=\sqrt{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt$$

לפי נוסחת מחצית זווית: $\sin\frac{t}{2}=\sqrt{1-\cos t}$ ונקבל:

$$4a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt=4a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})\sin\frac{t}{2}dt=4a^2(\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt-\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt$$

נשתמש בהצבה: $\cos\frac{t}{2}=p$ ואז $dp=-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt$ ונקבל:

$$=4a^2(-2\cos\frac{t}{2})|_0^{2\pi}+8a^2\int\limits_{-1}^{1}p^2dp=16a^2+\frac{8a^2}{3}p^3|_{-1}^{1}=\frac{32a^2}{3}$$

תבניות דיפרנציאליות:

תבנית דיפרנציאלית מסדר 1 על קבוצה $D\subseteq\mathbb{R}^n$ היא פונקציה $\omega:D\to Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$

כלומר לכל וקטור $x\in D$, $\omega(x)$ היא העתקה ליניארית מ$-\mathbb{R}^n$ ל$-\mathbb{R}$.

עם קצת רצון, קצת אלגברה ליניארית וקצת יכולת נקבל שכל תבנית דיפרנציאלית אפשר להציג כך:

$$\omega(x)=w_1(x)dx_1+\ldots w_n(x)dx_n$$

כאשר $dx_k(v) = v_k$ כלומר הטלה לרכיב המתאים.

<u>לדוגמה:</u>

באינפי 3 זכור לטוב ראינו שאם $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה שמוגדרת על קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ודיפרנציאבילית, אז הדיפרנציאל שלה בנקודה x, df_x, הוא העתקה ליניארית שמוגדרת על ידי:

$$df_x(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1(v) + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n(v)$$

מעט הגדרות:

1. תבנית דיפרנציאלית נקראת **מדוייקת** אם קיימת f כך ש: $\omega = df$ (כלומר התבנית היא דיפרנציאל של פונקציה כלשהי).
2. תבנית דיפרנציאלית $\omega(x) = w_1(x)dx_1 + \dots w_n(x)dx_n$ היא C^p (כלומר גזירה ברציפות p פעמים) אם כל אחת מהפונקציות w_k היא C^p.
3. תבנית דיפרנציאלית $\omega(x) = w_1(x)dx_1 + \dots w_n(x)dx_n$ שהיא C^1 ומקיימת לכל $1 \leq i, j \leq n$ את התנאי:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}$$

נקראת **סגורה**.

4. עבור קבוצה $D \subseteq \mathbb{R}^n$, **שדה וקטורי** בקבוצה D הוא פונקציה וקטורית:

$$f = (f_1, \dots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$$

5. שדה וקטורי הוא **משמר** אם קיימת פונקציה $F : D \to \mathbb{R}$ עבורה: $f = \nabla F$. הפונקציה F נקראת **הפוטנציאל** של f בקבוצה D.

שימו לב לקשר בין המושגים; כאשר פונקציה וקטורית $f = (f_1, \dots, f_n)$ מתאימה לתבנית דיפרנציאלית:

$$\omega(x) = f_1(x)dx_1 + \dots f_n(x)dx_n$$

אז התבנית הדיפרנציאלית היא מדוייקת אם ורק אם הפונקציה היא שדה משמר.

אינפי 4 תרגול 3

15 באפריל 2015

<u>תזכורת:</u>

תבנית דיפרנציאלית היא פונקציה מהצורה:

$$\omega(\underline{x}) = w_1(\underline{x})dx_1 + \ldots + w_n(\underline{x})dx_n$$

תבנית נקראת מדוייקת אם קיימת פונקציה סקלרית f כך ש: $df = \omega$, כלומר קיימת פונקציה שהתבנית היא הדיפרנציאל שלה.

תבנית נקראת סגורה אם לכל $1 \leq i, j \leq n$ מתקיים:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}$$

*כל תבנית מדוייקת היא סגורה.

בהמשך ננסח, בתנאים מסויימים, משפט הפוך.

כמה הגדרות:

יהי $D \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום כלשהו.

1. D נקרא קשיר מסילתית (אהלן אינפי 3) אם בין כל שתי נקודות בו אפשר להעביר מסילה.

כלומר, לכל $x_1, x_2 \in D$ קיימת $\gamma : [0,1] \to D$ כך ש: $\gamma(0) = x_1$ וגם $\gamma(1) = x_2$.

2. D נקרא פשוט קשר אם הוא קשיר מסילתית, ואין בתוכו עקומה סגורה המקיפה נקודות שאינן שייכות לו.

לשון אחר, תחום פשוט קשר הוא תחום קשיר בלי "חורים".

3. D נקרא כוכבי, אם קיימת $z \in D$ כך שלכל $x \in D$ הקטע בין שתי הנקודות נמצא בתוך D, כלומר:

$$\{z + t(x - z) | t \in [0,1]\} \subseteq D$$

4. D נקרא קמור אם לכל שתי נקודות הקטע ביניהן נמצא בתוכו, כלומר לכל $x, z \in D$,

$$\{z + t(x - z) | t \in [0, 1]\} \subseteq D$$

כעת, ננסח את למת פואנקרה:

בתחום כוכבי, תבנית דיפרנציאלית היא מדוייקת אם ורק אם היא סגורה.

אינטגרל מסילתי מסוג שני:

אינטגרל קווי/מסילתי של תבנית/פונקציה וקטורית/שדה וקטורי $\omega = (w_1, \dots w_n)$ לאורך מסילה $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ מחושב על ידי:

$$\int\limits_{\gamma} \omega d\underline{x} = \int\limits_{a}^{b} \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

כאשר הנקודה מסמלת מכפלה סקלרית בין שני וקטורים.

בניגוד לאינטגרל מסוג ראשון, שם הפונקציה הייתה סקלרית, כאן הפונקציה שלנו וקטורית. לכן, באינטגרל מסוג ראשון כפלנו בנורמה של וקטור הנגזרות של המסילה, כדי לקבל בסך הכל סקלר בתור אינטגראנד. באינטגרל מסוג שני הפוקנציה וקטורית, ולכן אנו פשוט מבצעים מכפלה סקלרית בין שני הוקטורים, כדי לקבל סקלר. שימו לב שכעת כיוונה של המסילה חשוב לנו.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל $\int_\gamma \omega d\underline{x}$ עבור $\omega(x, y) = (x - 2y, x + 2y)$ לאורך מסילה שמוגדרת ע"י $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ מהנקודה $(1, 0)$ עד לנקודה $(-1, 0)$ נגד כיוון השעון.

*ככלל, נגד כיוון השעון זה הכיוון ה"טבעי".

<u>פתרון:</u>

ההצגה הפרמטרית של המסילה שלנו היא:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \pi]$$

ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\int\limits_{\gamma} \omega d\underline{x} = \int\limits_{0}^{\pi} (\cos t - 2\sin t, \cos t + 2\sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt =$$

$$\int\limits_{0}^{\pi} (-\sin t \cos t + 2\sin^2 t + \cos^2 t + 2\sin t \cos t) dt = \int\limits_{0}^{\pi} (1 + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1 - \cos 2t}{2}) dt$$

$$\left(t - \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right)|_0^\pi = \frac{3\pi}{2}$$

לאורך הדרך השתמשנו בזהויות של זווית כפולה וכמובן בזהות $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.
לא מסובך.

משפט:

תבנית ω היא מדוייקת אם ורק אם האינטגרל $\int_C \omega d\underline{x}$ לא תלוי בעקומה C.
יותר מכך, אם C עקומה בין x_1 לבין x_2 ו$-f$ היא הפונקציה המקיימת: $df = \omega$ אז:

$$\int\limits_C \omega d\underline{x} = f(x_2) - f(x_1)$$

מסקנה:

אם ω תבנית מדוייקת ו$-C$ עקומה סגורה, אז:

$$\int\limits_C \omega d\underline{x} = 0$$

נדגים זאת.

נחשב את האינטגרל $\int_\gamma \omega d\underline{x}$ עבור התבנית $\omega(x,y) = x^2dx+ydy$ לאורך מסילה שהיא משולש שקודקודיו $(1,0),(1,1),(0,0)$ נגד כיוון השעון.

אם נחשב (בקצרה) את האינטגרל חישוב ישיר, נחלק את האינטגרל לשלושה אינטגרלים, כל אחד על כל צלע.

שלוש הפרמטריזציות של הצלעות הן:

$$\gamma_1(t) = (t,0), t \in [0,1]$$

$$\gamma_2(t) = (1,t), t \in [0,1]$$

$$\gamma_3(t) = (1-t, 1-t), t \in [0,1]$$

האינטגרל לאורך הצלע הראשונה יהיה $\frac{1}{3}$, האינטגרל לאורך הצלע השנייה יהיה $\frac{1}{2}$ והאינטגרל לאורך הצלע השלישית יהיה $-\frac{5}{6}$(מילה שלי).

האינטגרל שלנו, סכום שלושת האינטגרלים, יהיה 0.

מאידך גיסא, המשפט שלנו אומר זאת ללא כחל וסרק!

התבנית שלנו היא מדוייקת (הפונקציה $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2}$ נראית כמועמדת לגיטימית ל$-df = \omega$), המסילה סגורה ולכן לפי המשפט האינטגרל אכן שווה ל-0.

משפט גרין:

תהי C מסילה פשוטה, סגורה, וגזירה למקוטעין, ונסמן ב$-D$ את השטח החסום ע"י C.

אם $Q(x,y), P(x,y)$ פונקציות סקלריות גזירות ברציפות בקבוצה פתוחה Ω המכילה את D אזי:

$$\int\limits_C (Pdx+Qdy) = \iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

איך יכול להיות שמסילה היא פשוטה (חח"ע) וסגורה ($\gamma(a)=\gamma(b)$)?

כשאנו אומרים שמסילה היא פשוטה וסגורה, אנו מתכוונים לכך שהיא סגורה, ולמעט שני הקצוות היא חח"ע.

משפט גרין מאפשר לנו לעבור לנוחיותינו בין אינטגרל מסילתי מסוג שני לאינטגרל כפול ולהיפך.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל $\int_C F d\underline{x}$ כאשר $F(x,y) = (e^x - y + x, y^{\frac{3}{2}} + x)$ ו-C היא שפת מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 6.

<u>פתרון:</u>

נתחיל לחשב ללא משפט גרין.

פרמטריזציה של המסילה היא $\gamma(t) = (6\cos t, 6\sin t), t \in [0,2\pi]$. לכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\int\limits_C F d\underline{x} = \int\limits_0^{2\pi} (e^{6\cos t} - 6\sin t + 6\cos t, 6\sin^{\frac{3}{2}} t + 6\cos t) \cdot (-6\sin t, 6\cos t)dt =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} (-6\sin t e^{6\cos t} + 36\sin^2 t - 36\sin t\cos t + 36\sin^{\frac{3}{2}} t\cos t + 36\cos^2 t)dt$$

וזה לא קשה במיוחד אך גם לא נורא כיפי.

אם כן, נשתמש במשפט גרין. הפונקציות P,Q שלנו הן:

$$P(x,y) = e^x - y + x \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

$$Q(x,y) = y^{\frac{3}{2}} + x \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

ולפי משפט גרין (שימו לב שתנאי המשפט אכן מתקיימים):

$$\int\limits_C F d\underline{x} = \iint\limits_D (1-(-1))dxdy = 2\iint\limits_D dxdy$$

אינטגרל כפול של 1 על תחום מחשב את שטחו. שטח המעגל שלנו הוא 36π, ובסה"כ נקבל:

$$\int_C F d\underline{x} = 2 \cdot 36\pi = 72\pi$$

בתרגיל האחרון השתמשנו במשפט גרין כדי לעבור מאינטגרל מסילתי לאינטגרל כפול.

במקרים אחרים נרצה לעשות את המעבר בכיוון ההפוך. למשל, כשנרצה לחשב שטחים.

כפי שהזכרנו, שטח של תחום D ניתן לחישוב על ידי האינטגרל $\iint_D dxdy$. כדי להשתמש במשפט גרין אנחנו צריכים פונקציות P, Q שמצד אחד אכן תקיימנה:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

ומצד שני שתהיינה פשוטות יחסית כדי שנוכל לחשב את האינטגרל המסילתי בקלות (אחרת אין טעם לעבור לאינטגרל מסילתי).

דוגמאות לתבניות $Pdx + Qdy$ כאלה הן:

$$\int_\gamma xdy, \int_\gamma -ydx, \int_\gamma \frac{1}{2}(-ydx + xdy)$$

וכמובן אפשר לחשוב על תבניות נוספות. נבחר את אחת מהתבניות לפי מורכבות החישוב לפי כל אחת מהן.

<u>תרגיל:</u>

נמצא את השטח הכלוא על ידי גרף האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

<u>פתרון:</u>

ראשית נזכור ששטח האליפסה הוא $ab\pi$. לשם אנו רוצים להגיע.

פרמטריזציה של האליפסה היא:

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t), t \in [0, 2\pi]$$

נשתמש בצורה $\int_\gamma \frac{1}{2}(-ydx + xdy)$. אם כן, לפי משפט גרין:

$$S = \iint_D 1dxdy = \frac{1}{2}\int_\gamma -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-b\sin t, a\cos t)\cdot(-a\sin t, b\cos t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\sin^2 t + ab\cos^2 t)dt = ab\pi$$

אינפי 4 תרגול 4

22 באפריל 2015

הגדרה:

תחום Ω במישור נקרא תחום גרין אם שפתו, $\partial\Omega$, מורכבת מאיחוד סופי של מסילות פשוטות וסגורות.

אפשר להכליל את משפט גרין לתחום גרין, כלומר בתנאי משפט גרין, אם התחום Ω הוא תחום גרין אזי:

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{\partial\Omega}Pdx+Qdy$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C xe^{-2x}dx+(x^4+2x^2y^2)dy$ כאשר C היא שפת התחום הכלוא בין שני המעגלים $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4$ כאשר לאורך כל אחד מהם מתקדמים בכיוון החיובי.

*הכיוון החיובי הוא הכיוון בו התחום נמצא משמאלנו לאורך התנועה.

<u>פתרון:</u>

התחום D שלנו הוא תחום גרין, ולכן נוכל להשתמש במשפט גרין.

השדה הוקטורי שלנו הוא:

$$(P,Q)=(xe^{-2x},x^4+2x^2y^2)$$

ולכן:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=4x^3+4xy^2-0=4x(x^2+y^2)$$

ואם כן, לפי משפט גרין נקבל:

$$\int\limits_{C}xe^{-2x}dx+(x^4+2x^2y^2)dy=\iint\limits_{D}4x(x^2+y^2)dxdy$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

הזווית היא בין 0 לבין 2π. התחום שלנו הוא בין מעגל שרדיוסו 1 לבין מעגל שרדיוסו 2 ולכן $1 \le r \le 2$. בל נשכח את היעקוביאן r, ובסך הכל:

$$\iint\limits_D 4x(x^2+y^2)dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^2 4r\cos\theta \cdot r^2 \cdot rdrd\theta = 4\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta d\theta \cdot \int\limits_1^2 r^4 dr$$

והתשובה היא 0.

משטחים:

ראשית, נגדיר **הומיאומורפיזם** - פונקציה f נקראת הומיאומורפיזם אם היא חח"ע ועל, רציפה וגם ההופכית שלה רציפה.

שימו לב שאם f הומיאומורפיזם, מן הסתם גם f^{-1} הומיאומורפיזם.

אינטואיטיבית, הומיאומורפיזם היא פונקציה שרק מקמטת/מעוותת את המרחב באופן רציף, בלי לקרוע אותו או לעשות בו חורים (זה אולי מעט לא מובן, אך זה לא מעניין הקורס ולכן לא נתעכב על כך).

משפט:

יהיו $M \subset \mathbb{R}^n$, $a \in M$, $1 \le k < n$ ו־$p \in \mathbb{N}$. התכונות הבאות שקולות:

1. קיימת סביבה U_a של הנקודה a וקיימת $g : U_a \to \mathbb{R}^{n-k}$ כזאת ש־$g \in C^p(U_a)$, $rankJ_g(x) = n-k$ לכל $x \in U_a$ ובנוסף: $M \cap U_a = \{x \in U_a | g(x) = 0\}$.
2. קיימת סביבה של a ב־M, $M \cap V_a$, כזאת שהיא הגרף של הפונקציה $f : W \to \mathbb{R}^{n-k}$, כאשר $W \subset \mathbb{R}^k$ ו־$f \in C^p(W)$. כלומר:

$$M \cap V_a = \{(w, f(w)) | w \in W\}$$

3. קיימות סביבה של a ב־M, $M \cap G_a$, קבוצה פתוחה $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ והומיאומורפיזם $F : \Omega \to M \cap G_a$ כזה ש־$F \in C^p(\Omega)$ ובנוסף: $rankJ_F(x) = k$ לכל $x \in \Omega$.

הגדרה:

אם $a \in M \subset \mathbb{R}^n$ מקיימת את אחת מהתכונות הנ"ל, נאמר ש־M משטח k מימדי בסביבת הנקודה a השייך ל־C^p.

אם לכל נקודה $a \in M$ הקבוצה M היא משטח k מימדי השייך ל־C^p, נאמר ש־M הוא משטח k מימדי השייך ל־C^p.

הגדרות מרגשות:

בהמשך לתכונה 3 במשפט, נגדיר:

1. הזוג (F, Ω) נקרא מפה מקומית של $M \cap G_a$.
2. אוסף של מפות (F_α, U_α) עבורו $M = \bigcup\limits_\alpha F_\alpha(\Omega_\alpha)$ נקרא אטלס.

התכונות נראות מסובכות. נעסוק כעת רק במשטחים דו מימדיים במרחב $\mathbb{R}^3$.

אינטואיטיבית, משטח כזה אפשר להציג בשתי דרכים עיקריות (נסו להבין לאיזו תכונה כל דרך מתאימה):

1. משוואה (בנעלמים x, y, z), למשל:

א. המישור $z = 6$.

ב. הגליל $x^2 + y^2 = 1$.

ג. החרוט $x^2 + y^2 = (z-1)^2$.

2. פרמטריזציה מהצורה:

$$\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v))$$

כאשר כל אחת מהפונקציות ϕ_i היא כמובן פונקציה סקלרית. נמצא פרמטריזציות של המשטחים שהבאנו כדוגמאות:

א. פרמטריזציה של המישור $z = 6$ תהיה:

$$\phi(u, v) = (u, v, 6)$$

כאשר $u, v \in \mathbb{R}$.

ב. בגליל שלנו, x, y יוצרים ביניהם מעגל שרדיוסו 1, ו־z לא מוגבל כלל. אם כן, פרמטריזציה של הגליל תהיה:

$$\phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

כאשר $u \in [0, 2\pi]$ ו־$v \in \mathbb{R}$.

ג. בחרוט, x, y יוצרים מעגל, אך הפעם הרדיוס שלו תלוי ב־z. כאשר $z = 1$, הרדיוס הוא 0, כלומר יש רק זוג אחד של x, y שנמצא על המשטח עבור $z = 1$:

$$(x, y, z) = (0, 0, 1)$$

זהו בעצם הקודקוד של החרוט. ככל ש־z מתרחק מ־1, המעגל גדל (בין אם הוא גדול ממנו ובין אם הוא קטן ממנו; רדיוס כמובן צריך להיות אי־שלילי, אך מכיוון שהרדיוס כאן מתואר ע"י $(z-1)^2$, $z-1$ עצמו יכול להיות גם חיובי וגם שלילי. במילים אחרות, המשטח שלנו הוא בעצם שני חרוטים, שנושקים זה לזה בנקודה $(0, 0, 1)$).

אם כן, הפרמטריזציה שלנו צריכה לתאר מעגל ש־x, y עושים ורדיוסו תלוי במשתנה השלישי, z. כמו כן, כאשר $z = 1$ שני האחרים צריכים להתאפס.

לכן, פרמטריזציה מתאימה לחרוט היא:

$$\phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u+1)$$

כאשר $v \in [0, 2\pi]$, $u \in \mathbb{R}$.

כדאי לראות איך החרוט נראה בעזרת $wolframalpha$, או בעזרת $matlab$ אם אתם ממש חיים על הקצה.

אפשר גם לשחק מעט עם הקבועים או עם הסימנים ולראות איך המשטח משתנה, אין ספק שזה עוזר לתפוס את הנושא.

אפשר גם "ללכת הפוך", כלומר למצוא משוואה למשטח שנתון ע"י פרמטריזציה.

<u>לדוגמה:</u>

נתבונן במשטח שנתון ע"י הפרמטריזציה:

$$\phi(u,v) = (u-v, u+v, uv)$$

נרצה למצוא את המשטח שלנו בצורת משוואה.

לשון אחר, נרצה להביע אחד מהמשתנים $x = u - v, y = u + v, z = uv$ באמצעות השניים האחרים.

קל לראות שמתקיים:

$$y^2 - x^2 = (u+v)^2 - (u-v)^2 = 4uv = 4z$$

ולכן משוואה שתתאר את המישור היא למשל המשוואה:

$$z = \frac{y^2 - x^2}{4}$$

זהו פרבולואיד היפרבולי (בדקו איך הוא נראה בוולפרם!).

<u>הערות:</u>

1. כאשר משטח ניתן ע"י משוואה, נאמר שהוא ניתן להטלה למישור של שני המשתנים החופשיים.

למשל, הפרבולואיד ההיפרבולי מהדוגמה הקודמת הוא משטח שניתן להטלה למישור xy.

2. כאשר משטח נתון ע"י פרמטריזציה $\phi(u,v)$, הוקטורים המשיקים למשטח בנקודה a הם $\phi_u(a), \phi_v(a)$.

מרחב משיק:

הגדרה:

יהיו $M \subset \mathbb{R}^n$ משטח k מימדי מ־C^1 ותהי $x \in M$. וקטור $v \in \mathbb{R}^n$ נקרא וקטור משיק למשטח M בנקודה x אם קיימות עקומה $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ונקודה $t_0 \in I$ כך ש־$\gamma(t) \in M$ לכל $t \in I$, $\gamma(t_0) = x$ ו־$\gamma'(t_0)$.

אוסף כל הוקטורים המשיקים ל־M בנקודה x נקרא המרחב המשיק ל־M בנקודה x ונסמנו ב־$T_x(M)$.

המרחב המשיק למשטח דו מימדי ב־$\mathbb{R}^3$ הוא מישור משיק (נגענו במישורים משיקים באינפי 3).

<u>תרגיל:</u>

מצאו את המישור המשיק לגליל $M : \{(x,y,z)|x^2+y^2=1\}$ בנקודה $p = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$.

<u>פתרון:</u>

הפרמטריזציה שלנו היא:

$$\phi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$

כאשר $u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$.

לכן, הוקטורים המשיקים הם וקטורי הנגזרות:

$$\phi_u(u,v) = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$\phi_v(u,v) = (0,0,1)$$

כעת, נותר למצוא את הנקודה (u,v) עבורה $\phi(u,v) = p$.

קל לראות שמדובר על הנקודה $(u,v) = (\frac{\pi}{4}, 3)$. לכן, הוקטורים המשיקים בנקודה p הם:

$$\phi_u(\frac{\pi}{4}, 3) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

$$\phi_v(\frac{\pi}{4}, 3) = (0,0,1)$$

ולכן המישור המשיק יהיה:

$$T_p(M) = span\{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0,0,1)\} = \{(-a,a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$$

*אם $M \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, אז $T_x(M) = \mathbb{R}^n$ לכל $x \in M$.

אינפי 4 תרגול 5

29 באפריל 2015

חישוב שטח (תכולה) של משטח k מימדי

יהי M משטח k מימדי ב$-\mathbb{R}^n$, הנתון ע"י $F(x_1,\ldots,x_k)=(f_1(x_1,\ldots,x_k),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_k))$.

כדי לחשב שטח של משטח k מימדי, נחלק אותו לקוביות קטנות, ששטחה של כל אחת מהן הוא h^k (וצלעותיה באורך h).

כל קוביה כזו נעביר בעזרת העתקת הדיפרנציאל אל המישור המשיק למשטח בנקודה כלשהי, כלומר אם יש לנו תיבה Q_i נתבונן בתמונתה תחת dF_{q_i} (העברה מנקודה בקוביה לנקודה על המישור המשיק).

אם נסכם את השטחים ה$-k$ מימדיים של כל התמונות של כל הקוביות, בהנחה שהקוביות הופכות קטנות יותר ויותר ($h\to 0$), נקבל הערכה של שטח המשטח כולו.

אם כן, איך מחשבים את שטחה של תמונת קוביה?

נסמן $p_i=dF_{q_i}(Q_i)$. זהו מקבילון הנוצר ע"י הוקטורים:

$$h\cdot\frac{\partial F}{\partial x_1},\ldots,h\cdot\frac{\partial F}{\partial x_k}$$

נזכור (למרות שאף פעם לא ראינו את זה) ששטחו של מקבילון p שנוצר ע"י הוקטורים $v_1,\ldots,v_k$ הוא:

$$Vol(p)=\sqrt{\det(A^T\cdot A)}$$

כאשר A היא מטריצה שעמודותיה הן הוקטורים $v_1,\ldots,v_k$.

במקרה שלנו, נסמן ב$-A_i$ את המטריצה שעמודותיה הן הוקטורים $h\cdot\frac{\partial F}{\partial x_k},\dots,h\cdot\frac{\partial F}{\partial x_1}$, ונקבל שהשטח ה$-k$ מימדי של המקבילון p_i הוא:

$$\sqrt{\det(A_i^T\cdot A_i)}$$

אבל המטריצה הזו היא בדיוק מטריצת יעקובי שכל שורה שלה מוכפלת ב$-h$.

לכן, במטריצה $A_i^T\cdot A_i$ כל שורה מוכפלת ב$-h^2$, ויש בה k שורות. כפל שורה בקבוע מכפיל את הדטרמיננטה באותו הקבוע, ולכן:

$$\sqrt{\det(A^T\cdot A)}=\sqrt{\det(h\cdot J^T(q_i)\cdot h\cdot J(q_i))}=\sqrt{h^{2k}\det(J^T(q_i)\cdot J(q_i))}=h^k\sqrt{\det(J^T(q_i)\cdot J(q_i))}$$

אם נסכם את כל השטחים מהצורה הזו נקבל שהשטח ה$-k$ מימדי של המשטח הוא בערך:

$$V(M)\approx\sum_{i=1}^{p}V(Q_i)\cdot\sqrt{\det(J^T(q_i)\cdot J(q_i))}$$

מכיוון ש$-V(Q_i)=h^k$. לכן, אם נרצה להגדיר את השטח במדויק, נקבל:

$$V(M)=\iint\sqrt{\det(J^T\cdot J)}d\underline{x}$$

על התחום המתאים.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את שטח הפנים של ספירה עם רדיוס a.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של הספירה היא:

$$F(\theta,\varphi)=(a\sin\varphi\cos\theta,a\sin\varphi\sin\theta,a\cos\varphi)$$

כאשר $(\theta,\varphi) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]$.

נחשב ונקבל:

$$\sqrt{\det(J^T(\theta,\varphi) \cdot J(\theta,\varphi)} = a^2 \sin\varphi$$

ולכן שטח הפנים של הספירה יהיה:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 \sin\varphi d\varphi d\theta = 4\pi a^2$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את השטח ה-1 מימדי של עקומה גזירה ברציפות $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

<u>פתרון:</u>

המסילה שלנו היא מהצורה:

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$$

לכן:

$$J^T = \gamma'(t) = (\gamma_1', \ldots, \gamma_n')$$

ולכן:

$$J^T \cdot J = (\gamma_1')^2 + \ldots + (\gamma_n')^2 = \|\gamma'(t)\|$$

ולפי הנוסחה:

$$V = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

וזהו אורך העקומה, כצפוי.

שטח של משטח דו מימדי ב$-\mathbb{R}^3$.

אם המשטח שלנו הוא משטח דו מימדי ב$-\mathbb{R}^3$, אפשר לחשב את אלמנט השטח של המשטח ע"י מכפלה וקטורית.

כלומר, במקום לקחת את $\sqrt{\det(J^T \cdot J)}$, ניקח את $\|F_u \times F_v\|$ כאשר F הפרמטריזציה של המשטח.

מכפלה וקטורית של שני וקטורים $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ ניתנת לחישוב ע"י:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i(u_2v_3 - v_2u_3) - j(u_1v_3 - v_1u_3) + k(u_1v_2 - v_1u_2) =$$

$$= (u_2v_3 - v_2u_3, v_1u_3 - u_1v_3, u_1v_2 - v_1u_2)$$

אפשר להכליל את המכפלה למימדים יותר גבוהים, אך זה כבר סיפור אחר ויסופר בפעם אחרת.

כמה תכונות של המכפלה הוקטורית על קצה המזלג:

1. אנטי־קומוטטיביות: $u \times v = -v \times u$ (חשבו איך אפשר לראות זאת בעזרת הדטרמיננטה).
2. אין אסוציאטיביות: $u \times (v \times w)$ לא בהכרח שווה ל$-(u \times v) \times w$. לכן, לביטוי $u \times v \times w$ אין משמעות.
3. דיסטריביוטיביות: $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.
4. הומוגניות: $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v) = u \times (\lambda v)$.
5. $u \times (v \times w) = v(u \cdot w) - w(u \cdot v)$.
6. זהות יעקובי: $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את שטח הפנים של החרוט הנתון ע"י:

$$\phi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta, r)$$

כאשר $0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi$.

<u>פתרון:</u>

נחשב את וקטורי הנגזרות החלקיות:

$$\phi_r=(\cos\theta,\sin\theta,1)$$

$$\phi_\theta=(-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

ולכן:

$$\phi_r\times\phi_\theta=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\end{vmatrix}=i(-r\cos\theta)-j(r\sin\theta)+k(r\cos^2\theta+r\sin^2\theta)=$$

$$=(-r\cos\theta,-r\sin\theta,r)$$

והשטח יהיה:

$$V=\int_0^1\int_0^{2\pi}\|\phi_r\times\phi_\theta\|\,d\theta dr=\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+r^2}d\theta dr=\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{2}rd\theta dr=$$

$$\sqrt{2}\cdot 2\pi\int_0^1 rdr=\sqrt{2}\pi$$

הערה:

אם המשטח שלנו נתון להטלה, למשל על מישור xy (כלומר מהצורה $z = f(x,y)$), פרמטריזציה שלו תהיה:

$$\phi(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

ואז: $\phi_x = (1, 0, f_x), \phi_y = (0, 1, f_y)$ ולכן:

$$\phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1)$$

ולכן השטח יהיה:

$$V = \iint \|\phi_x \times \phi_y\| \, dxdy = \iint \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy$$

באופן דומה, כאשר המשטח ניתן להטלה על מישור xz אלמנט השטח יהיה $\sqrt{1 + f_x^2 + f_z^2}$ וכאשר המשטח ניתן להטלה על מישור yz אלמנט השטח יהיה $\sqrt{1 + f_z^2 + f_y^2}$.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את השטח של חלק מהמשטח $x = y^2 + z^2$ שנמצא בתוך הגליל $y^2 + z^2 = 9$.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו ניתן להטלה על מישור yz, כאשר $x = f(y,z) = y^2 + z^2$. לכן, ההצגה הפרמטרית תהיה:

$$\phi(y,z) = (y^2 + z^2, y, z)$$

ואלמנט השטח יהיה: $\sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} = \sqrt{f_y^2 + f_z^2 + 1}$. אם כן, השטח הוא:

$$V = \iint \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} dydz =$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$y = r\cos\theta$$

$$z = r\sin\theta$$

כאשר $0 \le r \le 3$,$0 \le \theta \le 2\pi$. היעקוביאן הוא r. כעת:

$$V = \iint \sqrt{1+4y^2+4z^2}dydz = \int_0^3\int_0^{2\pi}\sqrt{1+4r^2\cos^2\theta+4r^2\sin^2\theta}rd\theta dr = \int_0^3\int_0^{2\pi}\sqrt{1+4r^2}rd\theta dr =$$

$$= 2\pi\cdot(\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{8})|_0^3 = \frac{\pi}{6}(37^{\frac{3}{2}}-1)$$

אינפי 4 תרגול 6

5 במאי 2015

אינטגרל משטחי מסוג ראשון:

תהי f פונקציה סקלרית מ־$\mathbb{R}^3$ ל־$\mathbb{R}$ ויהי S משטח דו מימדי ב־$\mathbb{R}^3$ הנתון ע"י הפרמטריזציה $\phi(u,v)$.

האינטגרל המשטחי של f על S מחושב על ידי:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(\phi(u,v)) \cdot \|\phi_u \times \phi_v\| \, dudv$$

כאשר התחום D הוא התחום של (u,v).

ראינו שאינטגרל משטחי על משטח S של הפונקציה $f=1$ מבטא את שטח המשטח.

שימוש נוסף לאינטגרל משטחי מסוג ראשון הוא חישוב המסה של המשטח:

$$M = \iint\limits_S \rho(x,y,z)dS$$

כאשר ρ מבטאת את צפיפות המסה ליחידת שטח.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרלים המשטחיים הבאים:

א. $\iint_S (x+y+z)dS$ כאשר S הוא חלק המישור $x+2y+4z=4$ הנמצא באוקטנט הראשון (בו $x,y,z \geq 0$). (בעברית הוא נקרא תמן ־ $tomen$, שזו מילה לא רעה)

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו ניתן להטלה, למשל על מישור xy:

$$z(x,y)=1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2}$$

ולכן פרמטריזציה אפשרית של המשטח היא $\phi(x,y)=(x,y,1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2})$. במקרה זה אנו יודעים כבר ש:

$$\|\phi_x\times\phi_y\|=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$z_x=-\frac{1}{4},z_y=-\frac{1}{2}$$

ואם כן אלמנט השטח שלנו יהיה: $\|\phi_x\times\phi_y\|=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{21}}{4}$.

הפונקציה שלנו היא $f(x,y,z)=x+y+z$ ואם כן: $f(\phi(x,y))=f(x,y,1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2})=1+\frac{3x}{4}+\frac{y}{2}$.

לכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_S(x+y+z)dS=\iint\limits_D(1+\frac{3x}{4}+\frac{y}{2})\frac{\sqrt{21}}{4}dxdy$$

מהו התחום D שלנו?

אנו רוצים בראש ובראשונה ש$-0\geq z$, כלומר $1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2}\geq 0$. מצד שני, גם $x,y\geq 0$ ולכן התחום שלנו הוא המשולש שקודקודיו הם הנקודות $(0,0),(0,2),(4,0)$.

במילים אחרות, התחום הוא החלק של הרביע הראשון במישור שנמצא מתחת לישר $x+2y-4=0$.

לכן אפשר להציג את התחום D כך:

$$D=\{0\leq x\leq 4-2y,0\leq y\leq 2\}$$

וסה"כ האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_S (x+y+z)dS = \iint\limits_D (1+\frac{3x}{4}+\frac{y}{2})\frac{\sqrt{21}}{4}dxdy = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{4-2y} (1+\frac{3x}{4}+\frac{y}{2})\frac{\sqrt{21}}{4}dxdy =$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{16}\int\limits_0^2 (\frac{3x^2}{2}+2yx+4x)|_{x=0}^{x=4-2y}dy = \frac{\sqrt{21}}{6}\int\limits_0^2 (\frac{3}{2}(4-2y)^2+2(4-2y)y+4(4-2y)dy = \ldots = \frac{7\sqrt{21}}{3}$$

ב. $\iint_S z^2 dS$ כאשר S הוא שטח הפנים של החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ כאשר $z=2$ (כולל הבסיס).

<u>פתרון:</u>

נחלק את המשטח שלנו לשני משטחים; הבסיס והמעטפת, ונסמנם S_2, S_1 בהתאמה.

על הבסיס, $z=2$, ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_{S_1} z^2 dS = \iint\limits_{S_1} 2^2 dS = 4\cdot\iint\limits_{S_1} dS$$

כמו שכבר ראינו, אינטגרל כזה מחשב את שטחו של המשטח. במקרה זה, המשטח הוא מעגל שרדיוסו 2, ולכן שטחו הוא 4π. אם כן:

$$\iint\limits_{S_1} z^2 dS = \iint\limits_{S_1} 2^2 dS = 4\cdot\iint\limits_{S_1} dS = 16\pi$$

על המעטפת, המשטח ניתן להטלה: $z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. לכן פרמטריזציה של המשטח היא $\phi(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$.

הנגזרות החלקיות הן:

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ואלמנט השטח שלנו הוא:

$$\|\phi_x\times\phi_y\| = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$

הפונקציה שלנו היא $f(x,y,z) = z^2$, ולכן $f(\phi(x,y)) = x^2+y^2$.

לכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_{S_2} z^2 dS = \iint\limits_{D} (x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy$$

מהו התחום D שלנו?

האינטגראנד מתחנן שנעבור לקואורדינטות קוטביות: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

החרוט שלנו הוא $r = \sqrt{x^2+y^2} = z$, ומכיוון ש־$0 \le z \le 2$ בתחום שלנו, גם $0 \le r \le 2$. עם הזווית אין יותר מדי הפתעות, ולכן:

$$D = \{0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

היעקוביאן הוא כמובן r ובסה"כ האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_{S_2} z^2 dS = \iint\limits_{D} (x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2} r^2\sqrt{2}rdrd\theta = 2\sqrt{2}\pi\cdot(\frac{r^4}{4})|_0^2 = 8\sqrt{2}\pi$$

ואם כן, האינטגרל שלנו הוא:

$$\iint\limits_{S} z^2 dS = \iint\limits_{S_1} z^2 dS + \iint\limits_{S_2} z^2 dS = 16\pi + 8\sqrt{2}\pi$$

ג. $\iint_S xzdS$ כאשר S הוא שפת התחום החסום ע"י $y^2+z^2 \le 9$, $x+y=5$, $x=0$.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו הוא בעצם שפתו של תחום שחסום בין גליל ($y^2+z^2 \le 9$) ושני מישורים.

את התחום שלנו נוכל לחלק לשלושה תחומים - היכן שהמישור הראשון חותך את הגליל, היכן שהמישור השני חותך את הגליל ומה שבאמצע. כלומר:

$$S_1 := x=0, y^2+z^2 \le 9, S_2 := x = 5-y, y^2+z^2 \le 9, S_3 := 0 \le x \le 5-y, y^2+z^2 \le 9$$

נחשב את האינטגרל המשטחי על כל אחד מהתחומים האלו.

על S_1, $x = 0$ ולכן:

$$\iint\limits_{S_1} xzdS = \iint 0 = 0$$

על S_2, המשטח ניתן להטלה על מישור yz: $x(y, z) = 5 - y$. כלומר, פרמטריזציה של המשטח היא $\phi(y, z) = (5 - y, y, z)$.

הנגזרות החלקיות הן:

$$x_y = -1, x_z = 0$$

ולכן אלמנט השטח הוא:

$$\|\phi_x \times \phi_y\| = \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = \sqrt{2}$$

הפונקציה שלנו היא: $f(x, y, z) = xz$ ולכן $f(\phi(y, z)) = (5 - y)z$.

האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_{S_2} xzdS = \iint\limits_{D_2} (5 - y)z\sqrt{2}dydz$$

מהו התחום D_2 שלנו?

אנו נמצאים בגליל $y^2 + z^2 \leq 9$ ולכן נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$y = r\cos\theta, z = r\sin\theta$$

כלומר $r^2 \leq 9$ ולכן התחום הוא: $D_2 = \{0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

היעקוביאן הוא r ולכן האינטגרל יהיה:

$$\iint\limits_{S_2} xzdS = \iint\limits_{D_2} (5-y)z\sqrt{2}dydz = \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} (5 - r\cos\theta) r\sin\theta r d\theta dr =$$

$$= \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} 5r^2 \sin\theta d\theta dr - \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} r^3 \cos\theta \sin\theta d\theta dr = \int\limits_0^3 5r^2 (\int\limits_0^{2\pi} \sin\theta d\theta) dr - \int\limits_0^3 r^3 (\int\limits_0^{2\pi} (\frac{\sin 2\theta}{2}) d\theta) dr$$

ומכיוון ש־$\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$, נקבל:

$$\iint\limits_{S_2} xzdS = 0$$

על S_3, פרמטריזציה של המשטח תהיה:

$$\phi(x,\theta) = (x, 3\cos\theta, 3\sin\theta)$$

כאשר $x \in [0, 5-y]$ כלומר $x \in [0, 5 - 3\sin\theta]$.

וקטורי הנגזרות החלקיות הם:

$$\phi_x = (1,0,0), \phi_\theta = (0, -3\sin\theta, 3\cos\theta)$$

המכפלה הוקטורית תהיה:

$$\phi_x \times \phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3\sin\theta & 3\cos\theta \end{vmatrix} = i \cdot 0 - j \cdot 3\cos\theta + k \cdot 3\sin\theta = (0, -3\cos\theta, -3\sin\theta)$$

ולכן אלמנט השטח יהיה:

$$\|\phi_x \times \phi_\theta\| = \sqrt{0^2 + 9\cos^2\theta + 9\sin^2\theta} = 3$$

הפונקציה שלנו היא $f(x,y,z)=xz$, ולכן $f(\phi(x,\theta))=3x\cos\theta$.

האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_{S_3} xzdS=\iint\limits_{D_3} 3x\cos\theta dxd\theta$$

התחום D_3 שלנו הוא:

$$D_3=\{0\le x\le 5-3\sin\theta, 0\le\theta\le 2\pi\}$$

ולכן האינטגרל הוא:

$$\iint\limits_{S_3} xzdS=\iint\limits_{D_3} 3x\cos\theta dxd\theta=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{5-3\sin\theta} 3x\cos\theta dxd\theta=3\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta\cdot(\frac{x^2}{2})|_0^{5-3\sin\theta}d\theta=$$

$$3\int\limits_0^{2\pi}\frac{(5-3\sin\theta)^2}{2}\cos\theta d\theta=\frac{75}{2}\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta d\theta+\frac{27}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta d\theta-30\int\limits_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta$$

כעת,

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=0$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta=0$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta d\theta=\frac{\sin^3\theta}{3}|_0^{2\pi}=0$$

ואם כן:

$$\iint\limits_{S_3} xzdS=0$$

ובסה"כ, האינטגרל שלנו הוא:

$$\iint\limits_{S} xzdS = \iint\limits_{S_1} xzdS + \iint\limits_{S_2} xzdS + \iint\limits_{S_3} xzdS = 0 + 0 + 0 = 0$$

אינפי 4 תרגול 7

12 במאי 2015

אינטגרל משטחי מסוג שני:

באינטגרל משטחי מסוג שני הפונקציה היא פונקציה וקטורית (ולא סקלרית).

לאינטגרל כזה יש משמעות של שטף, של זרימה דרך המשטח.

אנחנו נעבוד עם שדות וקטוריים $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ומשטחים דו מימדיים ב$-\mathbb{R}^3$.

בדומה לאינטגרל מסילתי מסוג שני, שם הייתה משמעות לכיוון המסילה, כאן יש משמעות לכיוון הנורמל.

באופן כללי, נורמל (יחידה) למשטח יכול להיות נורמל חיצוני, הפונה "החוצה", או נורמל פנימי, הפונה "פנימה".

אינטואיטיבית, אם השטף לתוך המשטח הוא a, אז השטף החוצה מהמשטח הוא $-a$ (מסתכלים על מה שנכנס כעל "מינוס" מה שיצא).

לכן, אינטגרל של שדה וקטורי על משטח מסוים עם נורמל פנימי יהיה הנגדי של האינטגרל של אותו השדה ואותו המשטח עם נורמל חיצוני.

אם לא צוין במפורש אחרת, נחשב את האינטגרל כאשר הנומרל למשטח הוא חיצוני.

איך מחשבים אינטגרל מסילתי מסוג שני?

בהינתן שדה וקטורי $F(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ (כאשר $P,Q,R:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$) ומשטח S הנתון ע"י פרמטריזציה:

$$\phi(u,v)=(\phi_1(u,v),\phi_2(u,v),\phi_3(u,v))$$

כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^2$,$\phi_1, \phi_2, \phi_3 : D \to \mathbb{R}$, האינטגרל המשטחי (כאשר הנורמל החיצוני) יהיה:

$$\iint_S F dS = \iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iint_D F(\phi(u,v)) \cdot (\phi_u \times \phi_v) du dv$$

כאשר הנורמל הוא פנימי נקבל:

$$-\iint_D F(\phi(u,v)) \cdot (\phi_u \times \phi_v) du dv$$

נזכור שמכפלה וקטורית היא אנטי קומוטטיבית, כלומר $\phi_u \times \phi_v = -\phi_v \times \phi_u$ ולכן כאשר הנורמל הוא פנימי נוכל לכתוב:

$$\iint_D F(\phi(u,v)) \cdot (\phi_v \times \phi_u) du dv$$

דרך נוספת לסמן את האינטגרל היא:

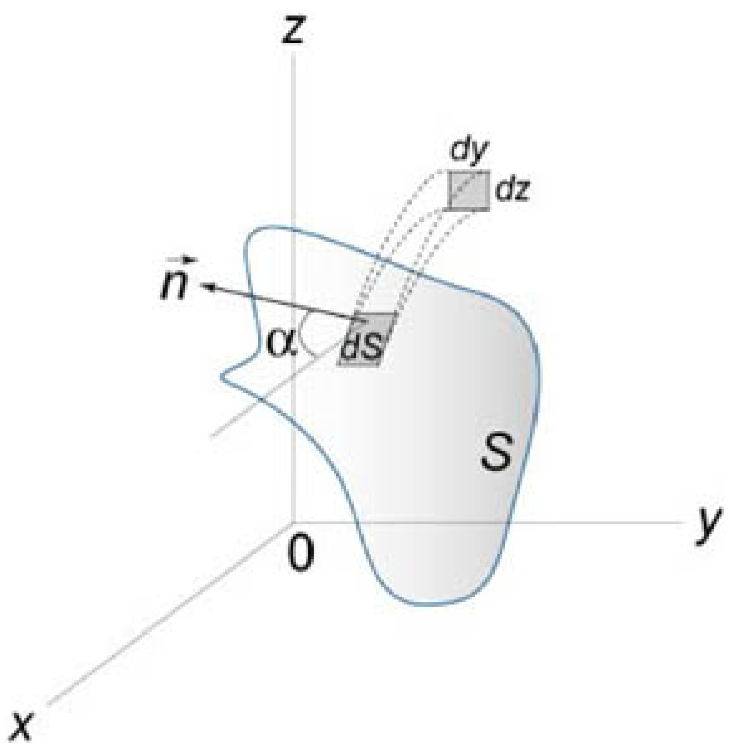
$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy$$

אם נסמן את הזוויות בין נורמל היחידה למשטח לבין ציר ה$x-$, ציר ה$y-$ וציר ה$z-$ ב$\gamma, \beta, \alpha-$ בהתאמה, מתקיים:

$$dy dz = \cos \alpha dS, dx dz = \cos \beta dS, dx dy = \cos \gamma dS$$

ולכן אפשר לכתוב גם:

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$



$dydz =$

$\cos\alpha dS$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרלים המשטחיים הבאים.

1. השדה הוקטורי הוא $F(x,y,z) = (x,-1,z)$ והמשטח S נתון ע"י $z = x\cos y$ כאשר $x \in [0,1], y \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ והנורמל הוא פנימי.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו ניתן להטלה, ופרמטריזציה שלו תהיה:

$$\phi(x,y) = (x, y, x\cos y)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_x = (1,0,\cos y), \phi_y = (0,1,-x\sin y)$$

ולכן:

$$\phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \cos y \\ 0 & 1 & -x\sin y \end{vmatrix} = i\cdot(-\cos y) - j\cdot(-x\sin y) + k\cdot 1$$

כלומר: $\phi_x \times \phi_y = (-\cos y, x\sin y, 1)$. כעת:

$$F(\phi(x,y)) = F(x,y,x\cos y) = (x,-1,x\cos y)$$

ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS = \iint\limits_D (x,-1,x\cos y)\cdot(-\cos y, x\sin y, 1)dxdy = \iint\limits_D (-x\cos y - x\sin y + x\cos y)dxdy =$$

התחום D הוא: $D = [0,1]\times[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$ ולכן:

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -x\sin y dydx = -\int\limits_0^1 x\cdot\cos y|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}dx = -(\frac{\sqrt{2}-1}{2})\cdot\frac{x^2}{2}|_0^1 = -\frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

נזכור שהנורמל פנימי, ולכן נהפוך את הסימן ונקבל בסך הכל:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

2. השדה הוקטורי הוא $F(x,y,z) = (y,x,z)$ והמשטח S נתון ע"י הפרמטריזציה:

$$\phi(u,v) = (\cos v, \sin v, u)$$

כאשר $u\in[0,2], v\in[\frac{\pi}{2},\pi]$.

<u>פתרון:</u>

וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_u = (0,0,1), \phi_v = (-\sin v, \cos v, 0)$$

ולכן:

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = i\cdot(-\cos v) - j\cdot(\sin v) + k\cdot 0 = (-\cos v, -\sin v, 0)$$

כעת:

$$F(\phi(u,v)) = F(\cos v, \sin v, u) = (\sin v, \cos v, u)$$

ולכן האינטגרל יהיה:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS = \iint\limits_D (\sin v, \cos v, u)\cdot(-\cos v, -\sin v, 0)dudv = \iint\limits_D -2\sin v\cos v dudv$$

התחום D הוא $D = [0,2]\times[\frac{\pi}{2},\pi]$, ולכן:

$$= \int\limits_0^2 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin 2v dv du = 2\cdot(\frac{\cos 2v}{2})|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \cos 2\pi - \cos\pi = 2$$

3. השדה הוקטורי הוא $\vec{F} = i\cdot y - j\cdot x + k\cdot z$, והמשטח S נתון ע"י $z = \sqrt{x^2+y^2}$, כאשר $z\in[0,1]$.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו ניתן להטלה. פרמטריזציה שלו תהיה:

$$\phi(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$$

וקטורי הנגזרות יהיו:

$$\phi_x = (1,0,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}), \phi_y = (0,1,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

ולכן:

$$\phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} = i \cdot (-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) - j \cdot (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) + k \cdot (1)$$

כלומר $\phi_x \times \phi_y = (-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)$. כעת:

$$F(\phi(x,y)) = F(x,y,\sqrt{x^2+y^2}) = (y,-x,\sqrt{x^2+y^2})$$

ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_S F \cdot \vec{n} dS = \iint\limits_D (y,-x,\sqrt{x^2+y^2}) \cdot (-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1) dxdy = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy$$

נציג את התחום D בקואורדינטות קוטביות: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

$\theta \in [0,2\pi]$ בנוהל. $r = \sqrt{x^2+y^2} = z$ ולכן $0 \le r \le 1$. היעקוביאן הוא r ולכן:

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 r \cdot ddrd\theta = 2\pi \cdot \frac{r^3}{3}|_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

וזהו האינטגרל.

אינפי 4 תרגול 8

19 במאי 2015

משפט הדיברגנץ:

יהי $F(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z).R(x.y.z))$, **הדיברגנץ** של F הוא:

$$divF=\nabla\cdot F=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\cdot F=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

יהי G גוף תלת ממדי במרחב $\mathbb{R}^3$ ששפתו היא משטח (סגור וחלק למקוטעין) עם נורמל חיצוני. יהי:

$$F(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z).R(x.y.z))$$

שדה וקטורי כך שהפונקציות P,Q,R גזירות ברציפות לפי כל אחד מהמשתנים $x.y.z$.

אזי:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS=\iiint\limits_G divFdxdydz$$

משפט הדיברגנץ מאפשר לנו לעבור מאינטגרלים משטחיים מסוג שני לאינטגרלים משולשים ולהיפך.

נזכור שאינטגרלים משטחיים אנו יודעים לחשב בעזרת אינטגרלים כפולים (בתרגול הקודם) ולכן במקרים מסויימים יש לנו החופש לבחור באיזו דרך לחשב את האינטגרל, מה שיכול לחסוך הרבה עבודה.

יתרה מזאת, בהינתן גוף תלת ממדי G, אנחנו יכולים לחשב את נפחו בעזרת:

$$\iiint\limits_G dxdydz$$

ולכן עבור שדה וקטורי מתאים, כזה שמקיים $divF = 1$ נוכל להשתמש במשפט הדיברגנץ ולחשב נפח של גוף בעזרת אינטגרל משטחי:

$$\iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_S F \cdot \vec{n} dS$$

הדבר מזכיר שימוש במשפט גרין כדי לחשב שטח של תחום (אינטגרל כפול) בעזרת אינטגרל מסילתי.

אם כן, שדה וקטורי מתאים הוא למשל $F(x,y,z) = \frac{1}{3}(x,y,z)$ ולכן אם נרצה לחשב את נפחו של גוף G, נוכל לחשב את האינטגרל:

$$\iint\limits_S F \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{3} \iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$$

כאשר המשטח S הוא שפת התחום G.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרלים $\iint_S F \cdot \vec{n} dS$ במקרים הבאים.

א. $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ והמשטח S הוא הספירה $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

<u>פתרון:</u>

אם ננסה לחשב את האינטגרל בעזרת פרמטריזציה, פרמטריזציה של המשטח היא:

$$\phi(\psi, \theta) = (a\cos\psi\sin\theta, a\sin\psi\sin\theta, a\cos\theta)$$

ומתקיים:

$$\phi_\psi \times \phi_\theta = (-a^2\cos\psi\sin^2\theta, -a^2\sin\psi\sin^2\theta, -a^2\sin\theta\cos\theta)$$

ונצטרך לחשב את האינטגרל:

$$\iint F(\phi(\psi,\theta))\cdot(\phi_\psi \times \phi_\theta)d\psi d\theta$$

שזה אפשרי אבל למה.

נשתמש במשפט הדיברגנץ:

$$divF = (3x^2+3y^2+3z^2)$$

ולכן:

$$\iint_S F\cdot\vec{n}dS = \iiint_G (3x^2+3y^2+3z^2)dxdydz$$

כאשר G הוא הספירה. נעבור לקואורדינטות כדוריות:

$$x = r\sin\theta\cos\psi, y = r\sin\theta\sin\psi, z = r\cos\theta$$

כאשר: $(r,\theta,\psi)\in[0,a]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$. היעקוביאן הוא $r^2\sin\theta$ ולכן:

$$\iiint_G (3x^2+3y^2+3z^2)dxdydz = 3\cdot\iiint_G r^2(\sin^2\theta\cos^2\psi+\sin^2\theta\sin^2\psi+\cos^2\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\psi$$

$$= 3\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^4\sin\theta = 3\cdot 2\pi\cdot(-\cos\theta)_0^\pi\cdot\frac{r^5}{5}|_0^a = \frac{12\pi a^5}{5}$$

וזהו האינטגרל.

ב. $F(x,y,z)=(x,y,z)$ והמשטח S הוא שפתו של הגליל $x^2+y^2=a$ ($a>0$) הכלוא בין המישורים $z=1, z=-1$.

<u>פתרון:</u>

אם נחשב את האינטגרל בעזרת פרמטריזציה, נצטרך לחלק אותו לשלושה תחומים (המעגלים התחתון והעליון והמעטפת).

נשתמש, אם כן, במשפט הדיברגנץ:

$$divF = 1 + 1 + 1 = 3$$

ולכן:

$$\iint\limits_S F \cdot \vec{n} dS = \iiint\limits_G 3dxdydz = 3 \cdot \iiint\limits_G dxdydz$$

והאינטגרל המשולש שקיבלנו שווה, כידוע, לנפחו של הגוף.

נפח גליל שווה לשטח הבסיס כפול הגובה. אורך הגובה הוא 2 (מהמישור $z = 1$ עד למישור $z = -1$).

הבסיס הוא מעגל עם רדיוס $\sqrt{a}$ ולכן שטחו πa. לכן:

$$\iiint\limits_G dxdydz = 2 \cdot \pi a$$

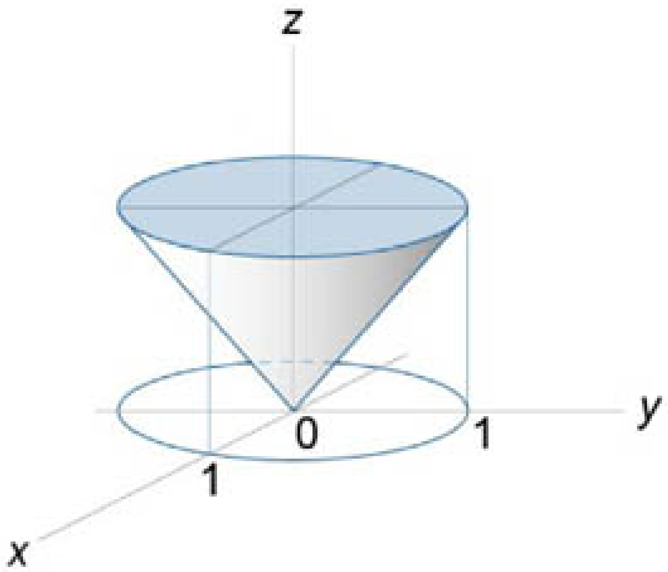
ובסה"כ האינטגרל שלנו יהיה:

$$\iint\limits_S F \cdot \vec{n} dS = 6\pi a$$

ג. $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ והמשטח S הוא שפת החרוט $x^2 + y^2 - z = 0$ החסום ע"י המישור $z = 1$.

<u>פתרון:</u>

הגוף שלנו הוא:



בתרגול פתרנו שאלה מעט שונה. אותו כוח בתכלס.

לפי משפט הדיברגנץ:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS=\iiint\limits_G(3x^2+3y^2+3z^2)dxdydz=$$

נעבור לקואורדינטות גליליות, כי רק x,y משחקים את המשחק של המעגל:

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$$

כאשר $0\le\theta\le2\pi$, $0\le r\le z$ ו־$0\le z\le1$. היעקוביאן הוא r ולכן:

$$\iiint\limits_G=3\cdot\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^z(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+z^2)rdrdzd\theta=6\pi\cdot\int\limits_0^1(\frac{r^4}{4}+\frac{z^2r^2}{2})_{r=0}^{r=z}=$$

$$=6\pi\cdot\int\limits_0^1\frac{3z^4}{4}dz=\frac{9\pi}{10}$$

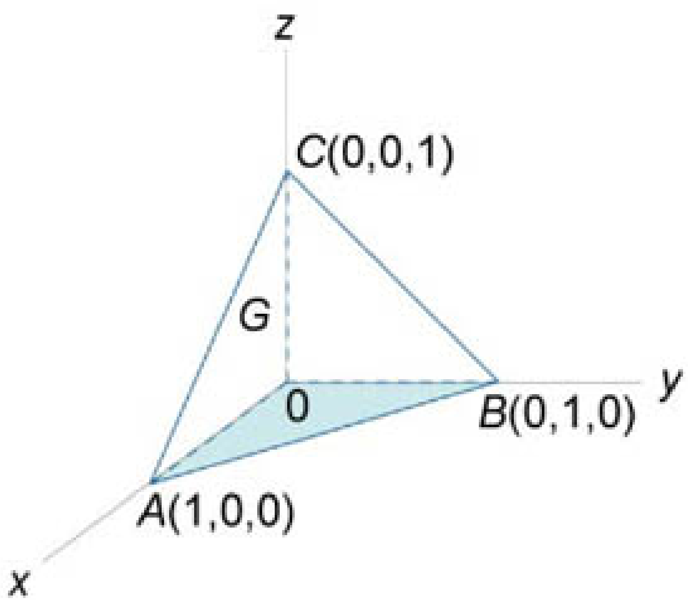
וזהו האינטגרל שלנו.

ד. $F(x,y,z)=(2xy,8xz,4yz)$ והמשטח S הוא טטראדר שקודקודיו הם הנקודות:

$$O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$$

<u>פתרון:</u>

הגוף שלנו הוא:



פירמידה משולשת שבסיסה הוא משולש ABC.

כעת, לפי משפט הדיברגנץ:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS=\iiint\limits_G(2y+0+4y)dxdydz=6\cdot\iiint\limits_G ydxdydz$$

הקו הישר AB הוא מהצורה $y=1-x$.

המישור ABC הוא מהצורה $x+y+z=1$ או $z=1-x-y$.

כדאי להיזכר בחומר מהתיכון (שאלון 807 או שאלון 007 לווטרנים) ולהבין איך הגענו למשוואות האלו (רמז: לא מסובך).

לכן, תחומי האינטגרל שלנו יהיו:

$$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le 1-x-y$$

והאינטגרל יהיה:

$$6 \cdot \iiint_G ydxdydz = 6 \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} ydzdydx = 6 \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x} y(1-x-y)dydx =$$

$$= 6 \cdot \int_0^1 ((1-x)\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3})|_0^{1-x} dx = 6 \cdot \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} dx = -\frac{(1-x)^4}{4}|_0^1 = \frac{1}{4}$$

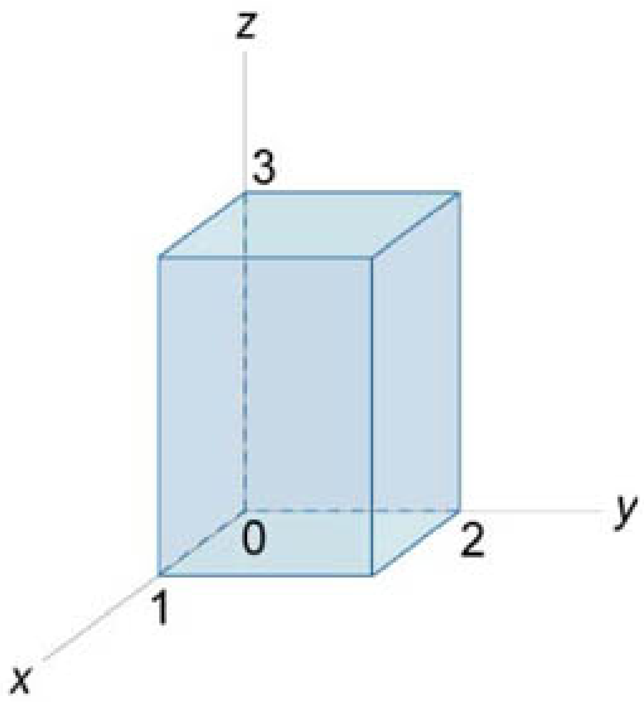
וזהו האינטגרל שלנו.

ה. $F(x,y,z) = (2x^2y, xz^2, 4yz)$ והמשטח S הוא שפת התיבה החסומה ע"י המישורים:

$$x=0, x=1, y=0, y=2, z=0, z=3$$

<u>פתרון:</u>

הגוף שלנו הוא:



לפי משפט הדיברגנץ:

$$\iint\limits_S F \cdot \vec{n} dS = \iiint\limits_G (4xy + 0 + 4y) dxdydz = 4 \iiint\limits_G (x+1) ydxdydz$$

התחום שלנו הוא: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$ ולכן:

$$4 \iiint\limits_G (x+1) ydxdydz = 4 \cdot \int\limits_0^1 \int\limits_0^2 \int\limits_0^3 (x+1) ydzdydx = 12 \cdot \int\limits_0^1 \int\limits_0^2 (x+1) ydydx =$$

$$= 12 \cdot \int\limits_0^1 (\frac{(x+1)y^2}{2})|_0^2 dx = 24 \cdot (x + \frac{x^2}{2})|_0^1 = 36$$

וזהו האינטגרל שלנו.

אינפי 4 תרגול 9

26 במאי 2015

משפט סטוקס:

יהי S משטחו חלק ששפתו היא העקומה C. אזי, לכל שדה וקטורי:

$$F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

כאשר $P,Q,R:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ גזירות ברציפות, משפט סטוקס אומר שמתקיים:

$$\int\limits_C Fd\vec{r} = \iint\limits_S (\nabla\times F)\cdot\vec{n}dS$$

האינטגרל משמאל הוא אינטגרל מסילתי מסוג שני, האינטגרל משמאל הוא אינטגרל משטחי.

הוקטור $\nabla\times F$ מסומן גם ב-$curlF$. נשים לב לכך ש:

$$\nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

האוריינטציה של המשטח ושל העקומה מתאימות זו לזו.

כלומר, אם נרצה לחשב אינטגרל מסילתי לאורך העקומה בכיוון הטבעי (כאשר המשטח אותו העקומה כולאת נמצא משמאלנו כאשר אנחנו מתקדמים לאורך העקומה) נתאים לו את האינטגרל המשטחי עם הנורמל הטבעי (בכיוון החיצוני), וכן להיפך.

אפשר לכתוב את משפט סטוקס גם כך:

$$\int\limits_C Pdx+Qdy+Rdz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרלים הבאים.

א. $\int_C (y+2z)dx+(x+2z)dy+(x+2y)dz$ והעקומה C היא חיתוך הספירה $x^2+y^2+z^2=1$ עם המישור $x+2y+2z=0$.

<u>פתרון:</u>

במקרה זה, $P=y+2z, Q=x+2z, R=x+2y$.

נחשב את נורמל היחידה למישור שלנו:

$$\vec{n}=\frac{(1,2,2)}{\sqrt{1+2^2+2^2}}=\frac{1}{3}(1,2,2)$$

כמו כן:

$$\nabla\times F=(2-2,2-1,1-1)=(0,1,0)$$

ולכן האינטגרל שלנו הוא:

$$\int\limits_C=\iint\limits_S(0,1,0)\cdot(1,2,2)\frac{1}{3}dS=\frac{2}{3}\iint\limits_S dS$$

האינטגרל שקיבלנו מחשב את שטחו של המשטח שכולאת העקומה C.

העקומה היא חיתוך של מישור וספירה; חיתוך כזה הוא מעגל. מהו אורך הרדיוס של מעגל כזה?

המישור שלנו עובר בראשית הצירים, ולכן המעגל הוא "מעגל גדול", כלומר רדיוסו הוא רדיוס הספירה.

במקרה שלנו $r=1$ ולכן שטח S הוא π, ולכן:

$$\int_C = \iint_S (0,1,0)\cdot(1,2,2)\frac{1}{3}dS = \frac{2}{3}\iint_S dS = \frac{2\pi}{3}$$

וזהו האינטגרל.

ב. $\int_C y^3dx - x^3dy + z^3dz$ והעקומה C היא חיתוך של הגליל $x^2+y^2=a^2$ עם המישור $x+y+z=b$.

<u>פתרון:</u>

במקרה זה $P=y^3, Q=-x^3, R=z^3$.

הנורמל למשטח הוא:

$$\vec{n} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

כמו כן:

$$\nabla\times F = (0-0, 0-0, -3x^2-3y^2)$$

ולכן האינטגרל שלנו הוא:

$$\int_C = \iint_S (0,0,-3x^2-3y^2)\cdot(1,1,1)\frac{1}{\sqrt{3}}dS = -\sqrt{3}\iint_S x^2+y^2dS$$

אנחנו נמצאים על הגליל $x^2+y^2=a^2$ ולכן:

$$= -\sqrt{3}a^2\iint_S dS$$

כעת, כדי לחשב את שטח המשטח, נטיל אותו אל המישור xy.

הפונקציה היא: $z=b-x-y$, ואלמנט השטח הוא:

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{3}$$

ולכן:

$$= -\sqrt{3}a^2 \iint\limits_D \sqrt{3}dxdy = -3a^2 \iint\limits_D dxdy$$

כעת, המשטח שלנו הוא מעגל, וכשהטלנו אותו על מישור xy נקבל מעגל שרדיוסו a, ושטחו הוא πa^2 ולכן:

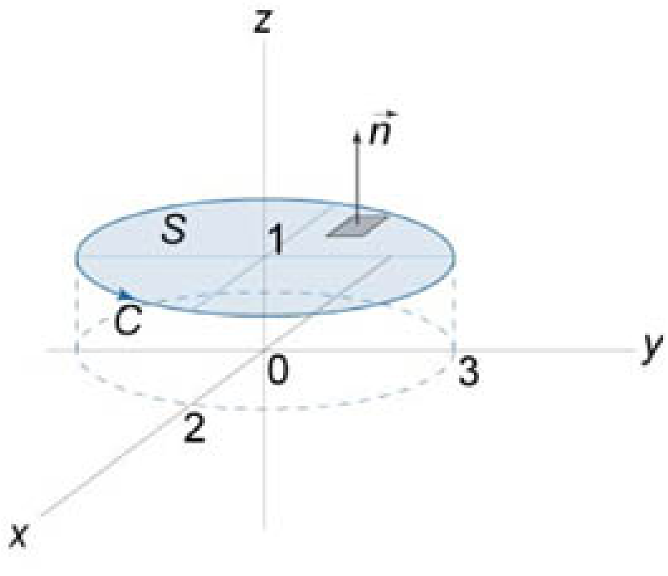
$$\int\limits_C = -3a^2 \cdot \pi a^2 = -3\pi a^4$$

וזהו האינטגרל. נשים לב שאת האינטגרל הזה למדנו לחשב בתרגולים הקודמים (עם פרמטריזציה וכן הלאה), ולכן אם נפנופי הידיים הגיאומטריים לא ברורים די הצורך, אפשר לחשב את האינטגרל כמו שצריך ולהיווכח שאכן כך הוא.

ג. $\int_C (x+z)dx+(x-y)dy+xdz$ כאשר C היא שפת האליפסה $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, z=1$.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו הוא:



במקרה זה $P=x+z, Q=x-y, R=x$.

נחשב את הנורמל:

$$\vec{n} = \frac{(0,0,1)}{\sqrt{0+0+1}} = (0,0,1)$$

כמו כן:

$$\nabla \times F = (0-0, 1-1, 1-0) = (0,0,1)$$

ולכן האינטגרל הוא:

$$\int\limits_C = \iint\limits_S (0,0,1)\cdot(0,0,1) dS = \iint\limits_S dS$$

האינטגרל הזה, כמו שאנו יודעים, מחשב שטח. במקרה שלנו S היא אליפסה עם צירים $a=2, b=3$ ולכן:

$$\int\limits_C = \pi ab = 6\pi$$

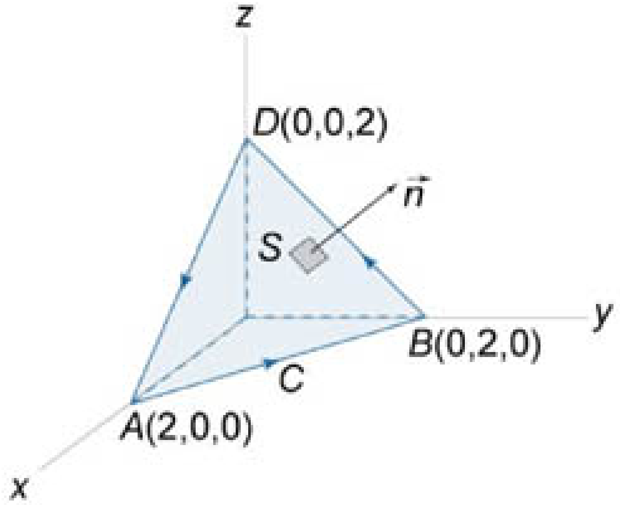
וזהו האינטגרל.

ד. $\int_C (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$ כאשר C היא שפת המשולש שקודקודיו נמצאים בנקודות:

$$A(2,0,0), B(0,2,0), D(0,0,2)$$

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו הוא:



המישור ABD נתון ע"י המשוואה $x+y+z=2$ (זה לא מסובך למצוא משוואת מישור בעזרת 3 נקודות שעליו; אנא היזכרו בחומר שלמדתם בתיכון).

לכן, הנורמל יהיה:

$$\vec{n} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

כמו כן:

$$\nabla \times F = (1-(-1), 1-(-1), 1-(-1)) = (2,2,2)$$

ולכן האינטגרל יהיה:

$$\int_C = \iint_S (2,2,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) dS = 2\sqrt{3} \iint_S dS$$

כעת, האינטגרל שקיבלנו מחשב את שטח המשולש. אפשר לחשב את שטחו של המשולש בכמה דרכים (זהו משולש שווה צלעות, לכן כל הזוויות הן $\frac{\pi}{3}$, ואורך כל צלע הוא $\sqrt{8}$).

שטח המשולש הוא $2\sqrt{3}$ ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\int_C = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 12$$

אינפי 4 תרגול 10

10 ביוני 2015

יריעות:

הגדרה:

קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת יריעה k מימדית אם לכל $a \in M$ קיימות קבוצה פתוחה $V_a \subseteq M$, קבוצה פתוחה $\Omega_a \subseteq \mathbb{R}^k$ והעתקה:

$$\varphi_a : \Omega_a \to V_a$$

חח"ע ועל (זו פונקציה וקטורית: $\varphi_a(x_1,\ldots,x_k) = (\varphi_1(x_1,\ldots x_k),\ldots,\varphi_n(x_1,\ldots,x_k))$), כך שמתקיים:

$$rank\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right) = k$$

כלומר דרגת היעקוביאן היא מקסימלית לכל נקודה ב$-M$ (תכונה זו נקראת רגולריות).

הזוג (Ω_a,φ_a) נקרא מפה של היריעה M.

אוסף מפות $\{(\Omega_a,\varphi_a)\}_{a\in I}$ המכסה את היריעה M נקרא אטלס.

ההעתקה: $\varphi_j^{-1}\circ\varphi_i : \Omega_i \to \Omega_j$ נקראת העתקת מעבר.

נשים לב שיריעה k מימדית נראית, מקומית, כמו $\mathbb{R}^k$, מה שמאפשר לעבוד איתה ביתר קלות (ואנו כבר עשינו אינטגרלים על מסילות, שהן יריעות חד־מימדיות ועל משטחים שהם יריעות דו־מימדיות).

<u>לדוגמה:</u>

נתבונן בספירת היחידה $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$S^2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$$

נסמן: $\Omega = \{(t,s)\in\mathbb{R}^2 : t^2+s^2<1\}$, כלומר עיגול היחידה ללא השפה. כעת, נגדיר פונקציות:

$$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6 : \Omega \to S^2$$

ע"י:

$$\varphi_1(t,s) = (t, s, \sqrt{1-t^2-s^2})$$
$$\varphi_2(t,s) = (t, s, -\sqrt{1-t^2-s^2})$$
$$\varphi_3(t,s) = (t, \sqrt{1-t^2-s^2}, s)$$
$$\varphi_4(t,s) = (t, -\sqrt{1-t^2-s^2}, s)$$
$$\varphi_5(t,s) = (\sqrt{1-t^2-s^2}, t, s)$$
$$\varphi_6(t,s) = (-\sqrt{1-t^2-s^2}, t, s)$$

כל אחת מההעתקות האלה מכסה המיספירה.

למה יש צורך בכל ההעתקות? שתי העתקות מכסות שתי המיספירות נגדיות; מכיוון שהמקור הוא קבוצה פתוחה, ההמיספירות האלו מכסות את כל הספירה למעט "קו המשווה", מעגל שמקיף את הספירה.

אנחנו צריכים לכסות גם את המעגל, ואם נכסה עוד שתי המיספירות, נכסה את כל המעגל הנותר למעט שתי נקודות אנטיפודיות. נוסיף עוד שתי המיספירות ונכסה את שתי הנקודות הנותרות.

אם כן, אטלס של הספירה הוא:

$$\{(\Omega, \varphi_i)\}_{i=1}^{6}$$

כמובן, יש עוד אטלסים אפשריים.

כאשר הקבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ נתונה בצורה סתומה:

$$M = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \ldots x_n) = 0 \end{array} \right\}$$

התנאי לכך ש-M יריעה הוא:

$$rank\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = k$$

לכל נקודה ב-M.

<u>לדוגמה:</u>

1. $M = \{(x,y) : xy - 1 = 0\}$.

זוהי היפרבולה, $g(x,y) = xy - 1$. היעקוביאן הוא:

$$\nabla g = (y, x)$$

והדרגה היא 1 אלא אם $(x,y)=(0,0)$. אלא שהנקודה $(0,0)$ לא שייכת ל־M ולכן M יריעה.

2. $M=\{(x,y):xy=0\}$.

אלו הם הצירים. בדומה ל־1, הדרגה היא 1 אלא אם $(x,y)=(0,0)$, אך במקרה זה $(0,0)\in M$ ולכן M אינה יריעה.

3. $M=\left\{(x,y,z):\begin{array}{c}x^2+y^2+z^2-1=0\\ x+y+z-1=0\end{array}\right\}$.

זהו מישור החותך את ספירת היחידה. היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix}2x & 2y & 2z\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

והדרגה היא 2 אלא אם $x=y=z$. האם יש נקודה כזו ב־M?

מהמשוואה השנייה נקבל: $3x=3y=3z=1$ כלומר $x=y=z=\frac{1}{3}$, אך נקודה זו לא מקיימת את המשוואה השנייה ולכן אין נקודות כאלו ב־M, כלומר M יריעה.

<u>תרגיל:</u>

האם הקבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^2$ יריעה? אם כן, מצאו אטלס מתאים.

א. $M=\{(x,y):y-x^3=0\}$.

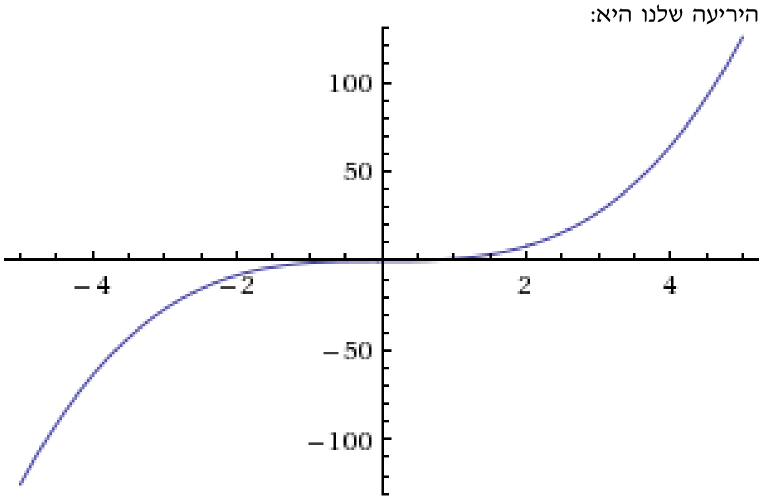
<u>פתרון:</u>

היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix}-3x^2 & 1\end{pmatrix}$$

והדרגה היא תמיד 1 ולכן זו יריעה.

היריעה שלנו היא:



נגדיר פונקציה $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ע"י: $\varphi(t) = (t, t^3)$ ואז אטלס מתאים הוא:

$$\{(\mathbb{R}, \varphi)\}$$

ב. $M = \{(x,y) : y^2 - x^3 = 0\}$.

<u>פתרון:</u>

במקרה זה, היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} 3x^2 & 2y \end{pmatrix}$$

והדרגה היא 0 בנקודה $(0,0) \in M$, ולכן M לא יריעה.

ג. $M = \{(x,y) : 9x^2 + y^2 - 1 = 0\}$.

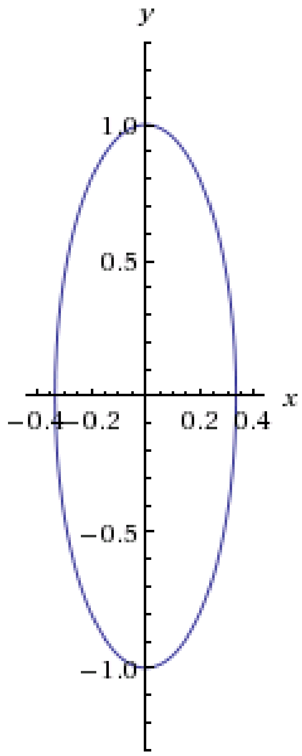
<u>פתרון:</u>

היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} 18x & 2y \end{pmatrix}$$

והדרגה היא 1 אלא אם $(x,y) = (0,0)$, אך $(0,0) \notin M$ ולכן M יריעה.

היריעה שלנו היא:



בדומה לספירה, נכסה את האליפסה באמצעות ארבעה חצאי אליפסה. נסמן:

$$\Omega = (-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})$$
$$D = (-1, 1)$$

ונגדיר פונקציות:

$$\varphi_1, \varphi_2 : \Omega \to M$$
$$\varphi_1(t) = (t, \sqrt{1-9t^2}), \varphi_2(t) = (t, -\sqrt{1-9t^2})$$
$$\varphi_3, \varphi_4 : D \to M$$
$$\varphi_3(t) = (\tfrac{\sqrt{1-t^2}}{3}, t), \varphi_4(t) = (-\tfrac{\sqrt{1-t^2}}{3}, t)$$

ונקבל אטלס לדוגמה:

$$\{(\Omega, \varphi_1), (\Omega, \varphi_2), (D, \varphi_3), (D, \varphi_4)\}$$

<u>תרגיל:</u>

נגדיר את הקבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$M = \{(x, y, z) : z - x^2 - y^2 = 0\}$$

האם זו יריעה? אם כן, מצאו לה אטלס.

<u>פתרון:</u>

היעקוביאן הוא:

$$\begin{pmatrix} -2x & -2y & 1 \end{pmatrix}$$

והדרגה היא תמיד 1 ולכן M היא יריעה.

אם נגדיר $\varphi : \mathbb{R}^2 \to M$ ע"י $\varphi(t, s) = (t, s, t^2 + s^2)$ נקבל אטלס:

$$\{(\mathbb{R}^2, \varphi)\}$$

אינפי 4 תרגול 11

16 ביוני 2015

נפתור את מבחן מועד ב' משנת תשע"א.

במבחן 6 שאלות, כל שאלה שווה 21 נקודות; יש לפתור 5 שאלות.

1. חשבו את האינטגרל:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

כאשר: $\Gamma = \{(x,y) : (x-800)^2 + (y+500)^2 = 400\}$ בכיוון החיובי.

<u>פתרון:</u>

Γ היא מעגל עם רדיוס 20 ומרכז בנקודה $(800, -500)$, כלומר לא מקיפה את ראשית הצירים.

לכן, אפשר להשתמש במשפט גרין:

$$\int\limits_{\Gamma} (P,O)d\vec{r} = \iint\limits_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

במקרה שלנו, $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ כלומר:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$$

ולכן:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \iint\limits_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \iint\limits_{D} 0dxdy = 0$$

ובסך הכל האינטגרל שווה ל־0.

2. חשבו את האינטגרל:

$$\int\limits_{\Gamma} (\sin x + xy)dx + (x^2+3)dy$$

כאשר Γ היא היקף המשולש שקודקודיו הם הנקודות $(1,0),(0,1),(-1,0)$ בכיוון החיובי.

<u>פתרון:</u>

נחלק את Γ לשלוש מסילות שונות, שכל אחת מהן תתאר צלע: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

נחשב את האינטגרל על כל אחת מהצלעות בנפרד, לפי הנוסחה:

$$\int\limits_{C} F \cdot d\vec{r} = \int\limits_{a}^{b} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

ונסכום את התוצאות.

פרמטריזציות של הצלעות תהיינה:

$$\gamma_1(t) = (1-t)(1,0) + t(0,1) = (1-t,t)$$
$$\gamma_2(t) = (1-t)(0,1) + t(-1,0) = (-t,1-t)$$
$$\gamma_3(t) = (1-t)(-1,0) + t(1,0) = (2t-1,0)$$

כאשר $t \in [0,1]$ בכל הפרמטריזציות. השדה הוקטורי הוא:

$$F(x,y) = (\sin x + xy, x^2+3)$$

עבור הצלע הראשונה, $\gamma_1'(t) = (-1,1)$, ומתקיים:

$$F(\gamma_1(t)) = (\sin(1-t) + t(1-t), (1-t)^2+3)$$

ולכן:

$$\int_{\Gamma_1} = \int_0^1 (\sin(1-t)+t(1-t),(1-t)^2+3)\cdot(-1,1)dt =$$

$$= \int_0^1 (2t^2-\sin(1-t)-3t+4)dt = \frac{1}{6}(4t^3-9t^2+24t)|_0^1 - \cos(1-t)|_0^1 = \frac{13}{6}+\cos 1$$

עבור הצלע השנייה, $\gamma_2'(t)=(-1,-1)$, ומתקיים:

$$F(\gamma_2(t)) = (\sin(-t)-t(1-t),(-t)^2+3) = (-\sin t+t^2-t,t^2+3)$$

ולכן:

$$\int_{\Gamma_2} = \int_0^1 (-\sin t+t^2-t,t^2+3)\cdot(-1,-1)dt = \int_0^1 (\sin t+t-2t^2-3)dt =$$

$$F(\gamma_2(t)) = (\sin(-t)-t(1-t),(-t)^2+3) = (-\sin t+t^2-t,t^2+3)$$

ולכן:

$$\int_{\Gamma_2} = \int_0^1 (-\sin t+t^2-t,t^2+3)\cdot(-1,-1)dt = \int_0^1 (\sin t+t-2t^2-3)dt =$$

$$= -\frac{1}{6}(4t^3-3t^2+18t)|_0^1 - \cos t|_0^1 = -\frac{13}{6}-\cos 1$$

ועבור הצלע השלישית, $\gamma_3'(t)=(2,0)$ ומתקיים:

$$F(\gamma_3(t)) = (\sin(2t-1)+0,(2t-1)^2+3)$$

ולכן:

$$\int_{\Gamma_3} = \int_0^1 (\sin(2t-1)+0,(2t-1)^2+3)\cdot(2,0) = \int_0^1 2\sin(2t-1)dt = -\frac{2\cos(2t-1)}{2}|_0^1 = 0$$

ובסך הכל האינטגרל שלנו הוא:

$$\int_\Gamma (\sin x + xy)dx + (x^2+3)dy = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} = 0$$

3. מצאו את שטח הפנים של המשטח:

$$S = \{(x,y,z) : x = y^2+z^2-3, -2 \le x \le 1\}$$

פתרון:

ראשית נשנה מעט את הקואורדינטות - $t = x+3$ ונקבל:

$$S = \{(t,y,z) : t = y^2+z^2, 1 \le t \le 4\}$$

זהו חרוט קטום.

המשטח שלנו ניתן להטלה, כלומר פרמטריזציה שלו תהיה:

$$\phi(y,z) = (y^2+z^2, y, z)$$

ואנו יודעים שאלמנט השטח במקרה כזה הוא:

$$\|\phi_y \times \phi_z\| = \sqrt{1+t_y^2+t_z^2} = \sqrt{1+4z^2+4y^2}$$

כאשר $t(y,z) = y^2+z^2$. את שטח הפנים נחשב בעזרת הנוסחה:

$$\mu(S) = \iint_S ds = \iint_D \|\phi_y \times \phi_z\| \, dydz = \iint_D \sqrt{1+4z^2+4y^2}dydz$$

נבטא את התחום D בקואורדינטות קוטביות:

$$y = r\cos\theta, z = r\sin\theta$$

במקרה שלנו, $1 \leq t = y^2 + z^2 = r^2 \leq 4$ ולכן $1 \leq r \leq 2$.

כמו כן, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ והיעקוביאן הוא r, ולכן:

$$\iint\limits_D \sqrt{1+4z^2+4y^2}dydz = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^2 \sqrt{1+4r^2}rdrd\theta = \frac{2\pi}{8}\int\limits_1^2 \sqrt{1+4r^2}8rdr =$$

$$\frac{2\pi}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}|_1^2 = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$$

4. חשבו את האינטגרל:

$$\iint\limits_S x^2dydz + ydzdx + zdxdy$$

כאשר $S = \{x^2+y^2 \leq (z-1)^2, 0 \leq z \leq 1\}$ עם נורמל חיצוני.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו ניתן להטלה: $z = -\sqrt{x^2+y^2}+1$. אנו בוחרים את השורש השלילי, כי $0 \leq z \leq 1$.

אם כן, הנורמל הוא:

$$\phi_x \times \phi_y = (-z_x, -z_y, 1) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)$$

כאשר הפרמטריזציה היא $\phi(x,y) = (x, y, -\sqrt{x^2+y^2}+1)$.

השדה הוקטורי הוא: $F(x,y,z) = (x^2, y, z)$, לכן:

$$F(\phi(x,y)) = (x^2, y, -\sqrt{x^2+y^2}+1)$$

ולכן האינטגרל יהיה:

$$\iint\limits_S x^2dydz + ydzdx + zdxdy = \iint\limits_D F(\phi(x,y)) \cdot (\phi_x \times \phi_y)dxdy =$$

$$\iint\limits_D (x^2, y, -\sqrt{x^2+y^2}+1) \cdot (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (\frac{x^3+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2}+1)dxdy$$

נציג את התחום D בקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

כאשר $0 \le \theta \le 2\pi$ ו־$0 \le r \le 1$. היעקוביאן הוא r ולכן:

$$= \iint\limits_D = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2} r^2\cos^3\theta + r\sin^2\theta - r + 1)rdrd\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (\frac{r^3\cos^3\theta}{3} + \frac{r^2\sin^2\theta}{2} - \frac{r^2}{2} + r)|_{r=0}^{r=1} d\theta = \int\limits_0^{2\pi} (\frac{\cos^3\theta}{3} + \frac{\sin^2\theta}{2} + \frac{1}{2})d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{(1-\sin^2\theta)\cos\theta}{3}d\theta + \int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{4}d\theta + \pi = \frac{3\pi}{2} + (-\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} - \frac{\sin 2\theta}{8})|_0^{2\pi}$$

ולכן בסה"כ האינטגרל הוא $\frac{3\pi}{2}$.

5. מצאו את נפח הגוף:

$$V = \{(x,y,z) : x^2+z^2 = (4-y)^2, 0 \le y \le 1\}$$

<u>פתרון:</u>

בעזרת משפט הדיברגנץ, אפשר לחשב נפח ע"י הנוסחה:

$$\frac{1}{3}|\iint\limits_{V} xdydz + ydxdz + zdxdy|$$

במקרה שלנו, המשטח ניתן להטלה: $y = 4 - \sqrt{x^2 + z^2}$. לכן:

$$\phi_x \times \phi_z = (-y_x, 1, -y_z) = (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}})$$

כאשר הפרמטריזציה היא: $\phi(x, z) = (x, 4 - \sqrt{x^2 + z^2}, z)$.

השדה הוקטורי הוא: $F(x, y, z) = (x, y, z)$. לכן:

$$F(\phi(x, z)) = \phi(x, z) = (x, 4 - \sqrt{x^2 + z^2}, z)$$

ולכן הנפח הוא:

$$\frac{1}{3}\iint\limits_{D} (x, 4 - \sqrt{x^2 + z^2}, z) \cdot (\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, 1\frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}})dxdz =$$

$$= \frac{1}{3}\iint\limits_{D} (\frac{x^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + z^2}} + 4 - \sqrt{x^2 + z^2})dxdz = \frac{4}{3}\iint\limits_{D} dxdz$$

מהו התחום D? אם נעבור לקואורדינטות קוטביות,

$$x = r\cos\theta, z = r\sin\theta$$

נקבל $0 \leq \theta \leq 2\pi$ וגם: $r^2 = (4 - y)^2$ ומכיוון ש$0 \leq y \leq 1$, נקבל: $3 \leq r \leq 4$.

כלומר, התחום D הוא טבעת, בין מעגל עם רדיוס 4 למעגל עם רדיוס 3.

האינטגרל על התחום D מחשב את שטחו, כלומר:

$$\frac{4}{3}\iint\limits_{D} dxdz = \frac{4}{3}(16\pi - 9\pi) = \frac{28\pi}{3}$$

וזהו הנפח.

6. בעזרת משפט סטוקס, חשבו את האינטגרל:

$$\int\limits_{\Gamma}(2y+x^2)dx+(z-2x+y)dy-(x+3z)dz$$

כאשר $\Gamma=\{(x,y,z):x^2+y^2=4,z=2\}$ בכיוון החיובי.

<u>פתרון:</u>

משפט סטוקס אומר:

$$\int\limits_{\Gamma}F\cdot d\vec{r}=\iint\limits_{S}curlF\cdot\vec{n}dS$$

במקרה שלנו:

$$F=(P,Q,R)=(2y+x^2,z-2x+y,-x-3z)$$

ולכן:

$$curlF=(0-1,0-(-1),-2-2)=(-1,1,-4)$$

המשטח S הוא עיגול במישור $z=2$ עם רדיוס 2 ומרכז בנקודה $(0,0,2)$.

נורמל למשטח הוא $(0,0,1)$. לכן:

$$\iint\limits_{S}curlF\cdot\vec{n}dS=\iint\limits_{S}(-1,1,-4)\cdot(0,0,1)dS=-4\iint\limits_{S}dS=-16\pi$$

מכיוון שהאינטגרל מחשב את שטחו של S, שהוא עיגול.

אינפי 4 תרגול 12

24 ביוני 2015

נפתור את מבחן מועד ב' משנת תשע"ב.

במבחן 6 שאלות, מתוכן יש לפתור 5 שאלות. כל שאלה שווה 21 נקודות.

1. תהי $M \subset \mathbb{R}^3$ קבוצה המוגדרת ע"י:

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 3, x - 2y + z = 0\}$$

א. האם זוהי יריעה? אם כן, מהו מימדה?

<u>פתרון:</u>

הדרגה של היעקוביאן צריכה להיות מקסימלית, כלומר דרגתה של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 4x^3 & 4y^3 & 4z^3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

צריכה להיות 2 בכל נקודה ב$-M$.

מתי הדרגה אינה 2? השורות צריכות להיות תלויות ליניארית, כלומר:

$$(4x^3, 4y^3, 4z^3) = \alpha \cdot (1, -2, 1)$$

כלומר: $4x^3 = 4z^3 = \alpha$ וכן $4y^3 = -2\alpha$, כלומר נקודה מהצורה:

$$(x, \sqrt[3]{-2}x, x)$$

האם יש נקודה כזו ב־M?

אם נקודה כזו מקיימת את המשוואה השנייה אז:

$$x - 2\sqrt[3]{-2}x + x = 0$$

ולכן $x = 0$, אך הנקודה $(0,0,0)$ לא מקיימת את המשוואה השנייה.

לכן אין נקודות כאלו על M ולכן דרגת המטריצה מקסימלית לכל נקודה ב־M. לכן M יריעה.

את M מגדירות שתי משוואות (בת"ל) בתוך מרחב תלת מימדי ולכן מימדה הוא $3-2=1$.

אפשר להבין זאת גם מצורתה של M - חיתוך של "ספירה פחוסה" ושל מישור נותן לנו "מעגל פחוס" שמימדו 1.

ב. מצאו מרחב משיק ל־M בנקודה $(1,1,1)$.

<u>פתרון:</u>

המרחב המשיק הוא מרחב האיפוס של המטריצה שלנו, כלומר אנחנו צריכים לחשב את:

$$Null\begin{pmatrix} 4x^3 & 4y^3 & 4z^3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר $(x,y,z) = (1,1,1)$. אם כן:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 4x + 4y + 4z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

ונקבל $x=-z, y=0$ ולכן המרחב המשיק הוא:

$$T_{(1,1,1)}(M) = \{(x,0,-x) : x \in \mathbb{R}\} = span\{(1,0,-1)\}$$

2. א. עבור אילו ערכים של הפרמטרים n, a מתקיים:

$$\int_\Gamma (x^2y^n + ax)(ydx + xdy) = 0$$

לכל עקומה סגורה $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$?

<u>פתרון:</u>

משפט: תבנית ω היא מדויקת אם ורק אם האינטגרל:

$$\int_\Gamma \omega d\underline{x}$$

לא תלוי בעקומה Γ.

במקרה שלנו, התבנית היא: $\omega(x,y) = (x^2y^{n+1} + axy, x^3y^n + ax^2)$.

אנו רוצים לבדוק מתי התבנית מדוייקת, כלומר להראות שקיימת $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המקיימת:

$$df = \omega$$

כלומר, עלינו לפתור את המשוואות:

$$\begin{cases} f_x = x^2y^{n+1} + axy \\ f_y = x^3y^n + ax^2 \end{cases}$$

קצת מד"ח לא הרגו אף אחד. נבצע אינטגרציה לפי x במשוואה הראשונה ולפי y במשוואה השנייה ונקבל:

$$\begin{cases} f = \frac{x^3y^{n+1}}{3} + \frac{ax^2y}{2} + g(y) \\ f = \frac{x^3y^{n+1}}{n+1} + ax^2y + h(x) \end{cases}$$

כאשר מבצעים אינטגרציה לפי x יש להוסיף פונקציה כללית של y, שמבחינת x היא קבוע, וכן להיפך.

אם כן:

$$\frac{x^3y^{n+1}}{3}+\frac{ax^2y}{2}+g(y)=\frac{x^3y^{n+1}}{n+1}+ax^2y+h(x)$$

הפונקציה g היא פונקציה של y בלבד. באגף ימין אין פונקציה של y בלבד ולכן $g=0$.

באופן דומה, הפונקציה h היא פונקציה של x בלבד. באגף שמאל אין פונקציה של x בלבד ולכן $h=0$.

נותרנו עם:

$$\frac{x^3y^{n+1}}{3}+\frac{ax^2y}{2}=\frac{x^3y^{n+1}}{n+1}+ax^2y$$

מכאן, $\frac{ax^2y}{2}=ax^2y$ וגם $\frac{x^3y^{n+1}}{n+1}=\frac{x^3y^{n+1}}{3}$ ובסה"כ הערכים המתאימים הם:

$$a=0,n=2$$

ב. סעיף ב' לא נמצא בחומר הקורס השנה. ירד במיקוד.

3. בעזרת משפט גרין חשבו:

$$\int_\Gamma x^2(y+1)dx-xy^2dy$$

כאשר $\Gamma=\{(x,y):x^2+y^2=1,y\geq 0\}$ נגד כיוון השעון.

<u>פתרון:</u>

המסילה שלנו לא סגורה, וכדי שנוכל להשתמש במשפט גרין יש לסגור אותה.

המסילה שלנו היא החצי העליון של מעגל היחידה. אפשר לסגור אותה בכמה דרכים, הפשוטה ביותר היא הקו הישר בין הנקודות $(-1,0)$ ו-$(1,0)$.

נסמן את הקו ב$-C$ ואת המסילה הסגורה שהתקבלה ב$-\tilde{\Gamma}$. נקבל:

$$\int_{\tilde{\Gamma}} = \int_{\Gamma} + \int_{C}$$

פרמטריזציה של C היא:

$$\gamma(t) = (t, 0)$$

כאשר $t \in [-1, 1]$. התבנית היא: $\omega(x,y) = (P,Q) = (x^2(y+1), -xy^2)$, ולכן:

$$\omega(\gamma(t)) = (t^2, 0)$$

כמו כן $\gamma'(t) = (1, 0)$ ולכן:

$$\int_{C} = \int_{-1}^{1} (t^2, 0) \cdot (1, 0) dt = \frac{t^3}{3}|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

כעת, לפי משפט גרין:

$$\int_{\tilde{\Gamma}} = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_{D} (-y^2 - x^2) dxdy$$

כאשר התחום D הוא החצי העליון של עיגול היחידה. נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

כאשר $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$. היעקוביאן הוא r, $x^2 + y^2 = r^2$ ולכן:

$$\iint_{D} (-y^2 - x^2) dxdy = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{1} -r^2 \cdot r dr d\theta = \pi \frac{-r^4}{4}|_{0}^{1} = -\frac{\pi}{4}$$

ובסך הכל:

$$-\frac{\pi}{4} = \int_{\Gamma} + \int_{C}$$

והאינטגרל שווה ל־$-\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$.

4. בעזרת משפט גאוס מצאו את נפח הגוף החסום ע"י $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $y = 2$.

<u>פתרון:</u>

משפט גאוס, הלא הוא משפט הדיברגנץ, אומר:

$$\iiint\limits_{G} divF dxdydz = \iint\limits_{S} F \cdot \vec{n} dS$$

כאשר S הוא משטח שהוא שפת הגוף G.

נפח של גוף מחשבים בעזרת:

$$\iiint\limits_{G} dxdydz$$

ולכן נחפש שדה וקטורי שהדיברגנץ שלו הוא 1 והוא יחסית פשוט, כדי שיהיה נוח לעבוד איתו.

המועמד המוביל הוא כמובן השדה:

$$F(x,y,z) = \frac{1}{3}(x,y,z)$$

שפת הגוף שלנו, שהוא חרוט, היא מעטפת החרוט ובסיסו. נחשב את האינטגרל על כל אחד מהם בנפרד ונסכום את האינטגרלים.

פרמטריזציה של המעטפת היא:

$$\phi(x,z) = (x, \sqrt{x^2 + z^2}, z)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_x = (1, \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, 0), \phi_z = (0, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}, 1)$$

ולכן:

$$\phi_x \times \phi_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} & 0 \\ 0 & \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} & 1 \end{vmatrix} = (\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, -1, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}})$$

כמו כן: $F(\phi(x,z)) = \frac{1}{3}(x, \sqrt{x^2+z^2}, z)$. לכן:

$$\iint\limits_S F \cdot \vec{n} dS = \iint\limits_D (\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, -1, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}) \cdot \frac{1}{3}(x, \sqrt{x^2+z^2}, z) dx dz = 0$$

אינטואיטיבית, למה האינטגרל מתאפס? המשטח שלנו הוא חרוט. אם נסתכל על "חתך רוחב" בחרוט, נקבל מעגל.

מכיוון שהפונקציה שלנו היא פשוט שליש של פונקציית הזהות, השטף בנקודה מסויימת על המעגל הוא בדיוק ה"היפך" מהשטף בנקודה האנטיפודית לנקודה הזו.

כעת, נחשב גם את האינטגרל על הבסיס.

פרמרטזיציה של הבסיס היא:

$$\phi(x,z) = (x, 2, z)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_x = (1,0,0), \phi_z = (0,0,1)$$

ולכן:

$$\phi_x \times \phi_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 0)$$

כמו כן, $F(x,y,z)=\frac{1}{3}(x,2,z)$ ולכן:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS=\iint\limits_D \frac{1}{3}(x,2,z)\cdot(0,-1,0)dxdz=-\frac{2}{3}\iint\limits_D dxdz$$

האינטגרל מחשב את שטחו של התחום D. התחום D הוא עיגול שרדיוסו 2 ולכן:

$$=-\frac{2}{3}\cdot 4\pi=-\frac{8\pi}{3}$$

נפח הוא תמיד חיובי, ולכן בסך הכל:

$$V=\frac{8\pi}{3}$$

5. בעזרת משפט סטוקס חשבו:

$$\int\limits_\Gamma ydx+zdy+xdz$$

כאשר Γ היא חיתוך של הספירה $x^2+y^2+z^2=9$ והמישור $x+y+z=0$ נגד כיוון השעון.

<u>פתרון:</u>

משפט סטוקס אומר:

$$\int\limits_C F\cdot d\vec{r}=\iint\limits_S(\nabla\times F)\cdot\vec{n}dS$$

כאשר C שפת המשטח S.

במקרה שלנו, $F=(P,Q,R)=(y,z,x)$ ולכן:

$$\nabla\times F=(0-1,0-1,0-1)=(-1,-1,-1)$$

נורמל יחידה למשטח שלנו הוא $(1,1,1)$ ולכן:

$$\int_{\Gamma} ydx + zdy + xdz = \iint_{S} (1,1,1)\cdot(-1,-1,-1)dS = -3\iint_{S} dS$$

האינטגרל מחשב את שטחו של המשטח S.

המישור שחותך את הספירה עובר בראשית הצירים, שהיא מרכזה של הספירה, ולכן Γ היא מעגל גדול.

S, אם כן, הוא עיגול שרדיוסו 3 ולפיכך שטחו 9π. לכן:

$$\int_{\Gamma} ydx + zdy + xdz = -3\cdot 9\pi = -27\pi$$

6. עבור פונקציה דיפרנציאבילית $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ותבנית ω הגדירו $\varphi * \omega$.

כאשר ω פונקציה ליניארית על $\mathbb{R}^n$ הוכיחו את הנוסחה:

$$\varphi * (d\omega) = d(\varphi * \omega)$$

<u>פתרון:</u>

זו השאלה התיאורטית.

ההעתקה $\varphi*$, שנקראת גם $pullback$, מוגדרת ע"י:

$$\varphi * \omega\,(t; v_1, v_2, \ldots, v_k) = \omega(\varphi(t); \varphi'(t)v_1, \ldots, \varphi'(t)v_k)$$

כאשר ω היא $k-$תבנית, $t; v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m, \varphi(t); \varphi'(t)v_1, \ldots, \varphi'(t)v_k \in \mathbb{R}^n$.

כאשר ω פונקציה ליניארית, $\omega(x) = \sum \pi_i(x)dx_i$. לפי הגדרת $\varphi*$:

$$\varphi * (\pi_i) = \pi_i(\varphi) = \varphi_i(t)$$

ולכן $d(\varphi * \omega) = d\varphi_i(t)$.

להוכחה מלאה התסכלו בהרצאות.