תזכורת

מתקיים: $m_A(x)|p_A(x)$.

משפט

תהי $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית. יהי $f(x)$ פולינום מאפס ל - A.

אזי לפולינום האופייני $p_A(x)$ מתקיים: $p_A(x)|[f(x)]^n$.

הוכחה

בלי הגבלת הכלליות נניח ש - $f(x)$ פולינום מתוקן (ניתן שכן חילוק פולינומים אינו תלוי בסקלר).

נסמן $\deg(f)=k$.

נרשום: $f(x)=x^k+\alpha_{k-1}\cdot x^{k-1}+\cdots+\alpha_1\cdot x+\alpha_0$.

נחפש מטריצה $B(x)$ כך שמתקיים: $(x\cdot I-A)\cdot B(x)=f(x)\cdot I_n$.

נחפש $B(x)$ בצורה הבאה: $B(x)=B_{k-1}\cdot x^{k-1}+B_{k-2}\cdot x^{k-2}+\cdots+B_1\cdot x+B_0$.

ז"א, נקבל את הביטויים למטריצות B_i דרך A והמקדמים α_i.

$$(x\cdot I-A)\cdot(B_{k-1}\cdot x^{k-1}+B_{k-2}\cdot x^{k-2}+\cdots+B_1\cdot x+B_0)=(x^k+\alpha_{k-1}\cdot x^{k-1}+\cdots+\alpha_1\cdot x+\alpha_0)\cdot I_n$$

נשווה את המקדמים לפי החזקות של x:

$$x^k:\ B_{k-1}=I_n \backslash\times A^k$$

$$x^{k-1}:\ B_{k-2}-A\cdot B_{k-1}=\alpha_{k-1}\cdot I_n \backslash\times A^{k-1}$$

$$\vdots$$

$$x:\ B_0-A\cdot B_1=\alpha_1\cdot I_n \backslash\times A$$

$$1:\ -A\cdot B_0=\alpha_0\cdot I_n \backslash\times 1$$

מהמשוואה הראשונה:

$$B_{k-1}=I$$

מהמשוואה השנייה:

$$B_{k-2}=\alpha_{k-1}\cdot I+A\cdot B_{k-1}$$

$$\vdots$$

מהמשוואה הלפני אחרונה:

$$B_0=\alpha_1\cdot I-A\cdot B_1$$

נשאר להראות שהמשוואה האחרונה מתקיימת:

$$-A \cdot B_0 = \alpha_0 \cdot I$$

נשתמש בהנחה ש - $f(A) = 0$.

ז״א: $\mathrm{A}^k + \alpha_{k-1} \cdot A_{k-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot A + \alpha_0 \cdot I = 0$.

נכפול משמאל את שני האגפים ב - $A^k, A^{k-1}, \cdots, A^2, A$, ונקבל:

$$A^k \cdot B_{k-1} = A^k$$

$$A^{k-1} \cdot B_{k-2} - A^k \cdot B_{k-1} = \alpha_{k-1} \cdot A^{k-1}$$

$$\vdots$$

$$A \cdot B_0 - A^2 \cdot B_1 = \alpha_1 \cdot A$$

$$-A \cdot B_0 = \alpha_0 \cdot I$$

נחבר את המשוואות פרט למשוואה האחרונה, ונקבל:

$$A \cdot B_0 = \mathrm{A}^k + \alpha_{k-1} \cdot A_{k-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot A = -\alpha_0 \cdot I$$

ז״א:

$$A \cdot B_0 = -\alpha_0 \cdot I \rightarrow \ -A \cdot B_0 = \alpha_0 \cdot I$$

לכן, גם המשוואה האחרונה מתקיימת.

ז״א, מצאנו מטריצות $B_0, B_1, \cdots, B_{k-2}, B_{k-1}$, כך ש - $B(x) = B_{k-1} \cdot x^{k-1} + B_{k-2} \cdot x^{k-2} + \cdots + B_1 \cdot x + B_0$ מקיימת את המשוואה:

$$(x \cdot I - A) \cdot B(x) = f(x) \cdot I_n.$$

לכן (נפעיל דטרמיננטה, שהינה פונקציה כפלית):

$$\det(x \cdot I - A) \cdot \det\big(B(x)\big) = \det(f(x) \cdot I)$$

כלומר (עפ״י הגדרת הפולינום האופייני וחישוב דטרמיננטה של מטריצה משולשית):

$$p_A(x) \cdot g(x) = [f(x)]^n$$

ולכן:

$$p_A(x) | [f(x)]^n$$

■

מסקנה

לכל מטריצה $A_{n\times n}$ ריבועית מתקיים: $p_A(x) | [m_A(x)]^n$.

מסקנה

השורשים של $m_A(x)$ הם הערכים העצמיים של A.

הוכחה

נשלב את שתי העובדות: $m_A(x)|p_A(x)|[m_A(x)]^n$, וניקח בחשבון שהשורשים של $p_A(x)$ הם הערכים העצמיים של A.

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח λ שורש של $p_A(x)$.

$$m_A(x)^n = p_A(x) \cdot g(x)$$

$$m_A(\lambda)^n = p_A(\lambda) \cdot g(\lambda) = 0$$

$$m_A(\lambda) = 0$$

$\boxed{\Rightarrow}$

נניח λ שורש של $m_A(x)$.

$$p_A(x) = m_A(x) \cdot h(x)$$

$$p_A(\lambda') = m_A(\lambda') \cdot h(\lambda') = 0$$

$$p_A(\lambda') = 0$$

■

דוגמה

לא ייתכן שמתקיים $p_A(x) = (x-2)\cdot(x-3)$, אבל $m_A(x) = x - 2$.

מסקנה

תהי $A_{n\times n}$ מטריצה כך שיש לה n ערכים עצמיים <u>שונים</u> $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

אזי: $m_A(x) = p_A(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$.

משפט

נניח ש - A, A' מטריצות ריבועיות דומות. יהי $f(x)$ פולינום מאפס ל - A.

אזי $f(x)$ פולינום מאפס גם ל - A'.

הוכחה

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$f(x) = \alpha_k \cdot x^k + \alpha_{k-1} \cdot x^{k-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0$$

$$f(A') = \alpha_k \cdot {A'}^k + \alpha_{k-1} \cdot {A'}^{k-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot A' + \alpha_0 \cdot I$$

$$f(A') = \alpha_k \cdot (P^{-1} \cdot A \cdot P)^k + \alpha_{k-1} \cdot (P^{-1} \cdot A \cdot P)^{k-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot (P^{-1} \cdot A \cdot P) + \alpha_0 \cdot I$$

$$f(A') = \alpha_k \cdot P^{-1} \cdot A^k \cdot P + \alpha_{k-1} \cdot P^{-1} \cdot A^{k-1} \cdot P + \cdots + \alpha_1 \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P + \alpha_0 \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$f(A') = P^{-1} \cdot (\alpha_k \cdot A^k + \alpha_{k-1} \cdot A^{k-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot A + \alpha_0 \cdot I) \cdot P$$

$$f(A') = P^{-1} \cdot f(A) \cdot P = P^{-1} \cdot 0 \cdot P = 0$$

■

מסקנה

למטריצות דומות יש אותו פולינום מינימלי.