לינארית 1 הרצאה 5

נסביר כעת איך מוצאים את A^{-1} (בהנחה ש-A אכן הפיכה, כמובן).

<u>תזכורת:</u>

כל פעולת שורה ρ אפשר להחליף בכפל משמאל במטריצת פעולה שורה אלמנטרית מתאימה, $\rho\left(I\right)$, באופן הבא:

$$\rho\left(A\right)=\rho\left(I\right)A$$

אמרנו ש-A הפיכה אם ורק אם הצורה הקנונית, $CF\left(A\right)$, היא מטריצת היחידה: $CF\left(A\right)=I$.

כמו כן, אמרנו ש: $CF\left(A\right)=\rho_{k}\left(I\right)\ldots\rho_{2}\left(I\right)\rho_{1}\left(I\right)A$, כלומר ביצענו דירוג.

מכאן, אם A הפיכה והצורה הקנונית שלה היא I, אז: $I=\rho_{k}\left(I\right)\ldots\rho_{2}\left(I\right)\rho_{1}\left(I\right)A$.

אם כן, ההופכית של A היא: $A^{-1}=\rho_{k}\left(I\right)\ldots\rho_{2}\left(I\right)\rho_{1}\left(I\right)$.

בשורה התחתונה, כדי למצוא את A^{-1}, אנחנו צריכים להפעיל על I את פעולות השורה שמדרגות את A קנונית.

בתיאור סכמטי:

$$(A|I) \to \left(I|A^{-1}\right)$$

כלומר, נשים את A משמאל ואת I מימין, ונדרג את A קנונית. כל פעולת שורה שאנו עושים על A נעשה גם על I. כשנסיים - כשמצד שמאל תופיע I - מצד ימין תופיע A^{-1}.

<u>לדוגמה:</u>

נמצא את ההופכית של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

נשים את A משמאל ואת I מימין, ונדרג את A קנונית:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-7R_1 \to R_3]{R_2-4R_1 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -13 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-R_3 \to R_3]{-\frac{1}{3}R_2 \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1-3R_3 \to R_1]{R_2-2R_3 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

הגענו ל-I בצד שמאל. בהנחה שלא טעינו, המטריצה שקיבלנו מימין היא A^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>הערה:</u>

1. לא חייבים לדעת מראש ש-A הפיכה לפני שמתחילים לדרג. אם היא לא הפיכה, בכל מקרה לא נוכל להגיע ל-I משמאל...
2. איך זה מתקשר למערכות של משוואות ליניאריות? כמו שכבר ראינו, מערכת כזו אפשר לרשום כך: $Ax = b$.

אם A הפיכה, אפשר לכפול את שני אגפי המשוואה ב-A^{-1} ולקבל:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \Longrightarrow x = A^{-1}b$$

ומצאנו את הפתרון! אנחנו גם רואים – אם A הפיכה, אז למערכת יש פתרון יחיד.

למשל, נפתור כך את המערכת:

$$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 4x+5y+6z=8 \\ 7x+8y+8z=4 \end{cases}$$

את המערכת הזו אפשר לרשום כך:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ולכן, כפי שהסברנו:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

מרחבים וקטוריים:

קבוצת המטריצות $\mathbb{F}^{m\times n}$ איננה שדה. בעצם, פעולת הכפל בין מטריצות כפי שהגדרנו אותה אפילו לא בהכרח מוגדרת...

החיבור, לעומת זאת, הוא סבבה, וגם יש לנו כפל בסקלר: αA. שתי הפעולות – חיבור וכפל בסקלר – מתנהגות יפה, למשל פילוג: $\alpha\left(A+B\right)=\alpha A+\alpha B$ או לכל מטריצה A יש נגדית, $-A$, ויש איבר נייטרלי לחיבור – מטריצת האפס...

איך נקראת קבוצה כזו, שעליה מוגדרים חיבור וכפל בסקלר מהשדה, והם נחמדים? התשובה היא מרחב וקטורי.

כמובן, נגדיר זאת כעת פורמלית.

יהיו V קבוצה ו-F שדה. על הקבוצה V מוגדרות פעולות של חיבור בין שני איברים $u+v$ וכפל בסקלר מהשדה: αv ($u,v\in V,\alpha\in F$). V נקראת **מרחב וקטורי** מעל F, אם מתקיימות התכונות הבאות:

1. סגירות:

א. לכל $u,v\in V$, $u+v\in V$.

ב. לכל $v\in V$ ולכל $\alpha\in F$, $\alpha v\in V$.

2. קיבוציות:

א. לכל $u,v,w\in V$, $(u+v)+w=u+(v+w)$.

ב. לכל $v\in V$ ולכל $\alpha,\beta\in F$, $\alpha\left(\beta v\right)=\left(\alpha\beta\right)v$.

3. חילופיות:

לכל $u,v\in V$, $u+v=v+u$.

4. איברים נייטרליים:

א. נייטרלי לחיבור: קיים איבר שנסמן $0_V \in V$ המקיים: $\forall v \in V:$ $0_V + v = v$.

ב. נייטרלי לכפל בסקלר: לכל $v \in V$, מתקיים: $1_F \cdot v = v$.

5. איברים נגדיים:

לכל $v \in V$ קיים איבר שנסמן $-v \in V$ המקיים: $v + (-v) = 0_V$.

6. פילוג:

א. לכל $u, v \in V$ ולכל $\alpha \in F$ מתקיים: $\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$.

ב. לכל $v \in V$ ולכל $\alpha, \beta \in F$ מתקיים: $(\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$.

<u>דוגמאות קלאסיות:</u>

א. מטריצות: $F^{m\times n}$ עם פעולות החיבור והכפל בסקלר ה"רגילות", זהו מרחב וקטורי.

ב. נסמן: $F^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : \forall 1 \leq i \leq n, x_i \in F\}$, כלומר וקטורים עם n רכיבים מהשדה F. עם הפעולות ה"רגילות", כלומר:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\alpha (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

פעולות "רכיב-רכיב", F^n הוא מרחב וקטורי.

בבית הספר רואים את $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

ג. לפני שנציג את הדוגמה, נזכיר מהו פולינום - פולינום p הוא פונקציה

מהצורה:

$$p\left(x\right)=a_{n}x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{1}x+a_{0}$$

כאשר $a_{0},\ldots,a_{n}$ נקראים המקדמים של הפולינום, למשל:

$$p\left(x\right)=x^{3}+2x-1\Longrightarrow a_{3}=1,a_{2}=0,a_{1}=2,a_{0}=-1$$

החזקה הגבוהה ביותר שהמקדם שלה שונה מ-0 נקראת המעלה או **הדרגה** של הפולינום p, ומסומנת: $\deg p$.

בדוגמה: $p\left(x\right)=x^{3}+2x-1$, $\deg p=3$.

את קבוצת כל הפולינומים מדרגה לכל היותר n עם מקדמים מהשדה F נסמן: $F_{n}\left[x\right]$. למשל:

$$\mathbb{R}_{2}\left[x\right]=\left\{ a_{2}x^{2}+a_{1}x+a_{0}:a_{0},a_{1},a_{2}\in\mathbb{R}\right\}$$

עם הפעולות:

$$\left(a_{n}x^{n}+\cdots+a_{1}x+a_{0}\right)+\left(b_{n}x^{n}+\cdots+b_{1}x+b_{0}\right)=$$

$$\left(a_{n}+b_{n}\right)x^{n}+\cdots+\left(a_{1}+b_{1}\right)x+\left(a_{0}+b_{0}\right)$$

$$\alpha\left(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\right)=\alpha a_nx^n+\cdots+\alpha a_1x+\alpha a_0$$

$F_n\left[x\right]$ הוא מרחב וקטורי.

<u>הערה:</u>

1. אם V מרחב וקטורי, נהוג לקרוא לאיברי V וקטורים.
2. כמובן, יש דוגמאות נוספות למרחבים וקטוריים, למשל קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים בשדה F שנסמן: $F\left[x\right]$.
3. מתוך התכונות שמגדירות מרחב וקטורי, אפשר להוכיח תכונות נוספות, למשל:

$$\alpha v=0_V\iff\alpha=0_F\vee v=0_V$$

$$\left(-1_F\right)v=-v$$

<u>תת-מרחב וקטורי:</u>

נתבונן בקבוצה הבאה:

$$U=\left\{(0,a,0,a):a\in\mathbb{R}\right\}\subseteq\mathbb{R}^4$$

האם U, עם הפעולות ה"רגילות", היא מרחב וקטורי?

אם אנו רוצים להראות שלא, מספיק להראות שאחת מהתכונות לא מתקיימת, ולשם כך מספיקה דוגמה נגדית.

לעומת זאת, אם אנו רוצים להוכיח שכן, צריך לעבור תכונה-תכונה ולהוכיח את כולן...האם אפשר לקצר את התהליך?

יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה F ו-$U \subseteq V$, אנו אומרים ש-U הוא **תת-מרחב וקטורי** של V (תמ"ו או ת"מ) אם הוא מרחב וקטורי עם אותן פעולות כמו של V.

מסתבר, כפי שכבר ננסח במשפט, שיותר קל לבדוק האם U תת-מרחב של V מאשר לבדוק ש-U הוא מרחב בפני עצמו. המשפט הזה נקרא הקריטריון המקוצר לתת-מרחב וקטורי.

<u>הקריטריון המקוצר:</u>

יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה F ו-$U \subseteq V$. U הוא תת-מרחב של V, אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

א. $0_V \in U$. כלומר, איבר האפס של המרחב נמצא גם בקבוצה.

ב. לכל $u, v \in U$ ולכל $\alpha \in F$ מתקיים: $\alpha u + v \in U$. סגירות לחיבור ולכפל בסקלר "בבת אחת".

לפני שנוכיח, נדגים. נוכיח ש-$U = \{(0, a, 0, a) : a \in \mathbb{R}\}$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{R}^4$. כמובן, נשתמש בקריטריון – נוכיח ששני התנאים הדרושים מתקיימים.

א. איבר האפס הוא: $(0, 0, 0, 0)$. הוא שייך ל-U, מכיוון שעבור $a = 0 \in \mathbb{R}$ נקבל: $(0, 0, 0, 0) \in U$.

ב. יהיו $u, v \in U$ ו-$\alpha \in \mathbb{R}$, צ"ל: $\alpha u + v \in U$.

אם כן, מכיוון ש-$u, v \in U$, לפי הגדרת U קיימים $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$u = (0, a_1, 0, a_1), v = (0, a_2, 0, a_2)$. לכן:

$$\alpha u + v = \alpha (0, a_1, 0, a_1) + (0, a_2, 0, a_2) = (0, \alpha a_1 + a_2, 0, \alpha a_1 + a_2)$$

מכיוון ש: $a_1, a_2, \alpha \in \mathbb{R}$ אז גם: $\alpha a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$ ולכן – לפי הגדרת U – נקבל שאכן: $\alpha u + v \in U$.

סה"כ, התכונות הדרושות מתקיימות ולכן U הוא תת-מרחב וקטורי, כנדרש.

דוגמה לתת-קבוצה שאיננה תת-מרחב: $U = \{(0, a, 1, a) : a \in \mathbb{R}\}$, עם הפעולות ה"רגילות" של $\mathbb{R}^4$. זהו לא תת-מרחב כי, למשל, $(0, 0, 0, 0) \notin U$.

<u>הוכחת הקריטריון:</u>

מצד אחד, ברור שאם U תת-מרחב ומקיים את כל התכונות של מרחב וקטורי, הוא גם מקיים את שתי התכונות של הקריטריון.

הצד המעניין הוא הצד השני – נתונות שתי התכונות שבקריטריון:

א. $0_V \in U$.

ב. לכל $u, v \in U$ ולכל $\alpha \in F$ מתקיים: $\alpha u + v \in U$.

וצ"ל שכל התכונות שבהגדרת מרחב וקטורי מתקיימות עבור U.

נשים לב – התכונות של חילופיות, קיבוציות, נייטרלי לכפל בסקלר ופילוג טוענות טענה על כל הוקטורים ב-V, מבלי לדרוש קיום של וקטור ב-V. אם טענה נכונה לכל הוקטורים ב-V, מכיוון ש-$U \subseteq V$ היא גם נכונה לכל הוקטורים ב-U.

נותר לנו להוכיח את תכונת הסגירות, קיום איבר נייטרלי וקיום איבר נגדי.

ראשית, אחד הנתונים בקריטריון הוא: $0_V \in U$, ולכן יש ב-U איבר נייטרלי.

כעת, אנו יודעים שלכל $u, v \in U$ ולכל $\alpha \in F$ מתקיים: $\alpha u + v \in U$, ולכן:

א. אם נבחר $\alpha = 1_F$ נקבל: $1_F \cdot u + v \in U$, כלומר: $u + v \in U$ וזו סגירות לחיבור.

ב. אם נבחר את $v = 0_V$ נקבל: $\alpha u + 0_V \in U$, כלומר: $\alpha u \in U$ וזו סגירות לכפל בסקלר.

ג. אם נבחר $v = 0_V, \alpha = -1_F$, נקבל: $-1_F \cdot u + 0_V \in U$, כלומר: $-u \in U$ וזהו קיום של איבר נגדי.

<u>דוגמאות:</u>

1. בכל מרחב וקטורי V, $V, \{0_V\}$ הם תת-מרחבים; תתי-מרחבים נקראים תתי-מרחבים **טריוויאליים**.

2. מרחב האפס של מטריצה – מרחב האפס של מטריצה $A \in F^{m \times n}$ מסומן $N(A)$, זו קבוצת כל הפתרונות של המערכת ההומוגנית: $Ax = 0$:

$$N(A) = \{x : Ax = 0\} \subseteq F^n$$

נוכיח בעזרת הקריטריון שזהו אכן תת-מרחב של F^n.

א. $0 \in N(A)$ כי: $A \cdot 0 = 0$.

ב. יהיו $x_1, x_2 \in N(A)$ ו-$\alpha \in F$, צ"ל $\alpha x_1 + x_2 \in N(A)$. אם כן:

$$A(\alpha x_1 + x_2) = \alpha A x_1 + A x_2 = \alpha \cdot 0 + 0 = 0$$

ואכן: $\alpha x_1 + x_2 \in N(A)$, כנדרש.

<u>הערה:</u> קבוצת הפתרונות של מערכת לא-הומוגנית היא לא תת-מרחב.
בדקו!

3. במרחב $F^{n\times n}$, מסמנים ב-$GL_n(F)$ את קבוצת המטריצות ההפיכות.
עם פעולות החיבור והכפל ה"רגילות", הקבוצה הזו איננה מרחב וקטורי, למשל
תכונת הסגירות לחיבור: $I, -I \in GL_n(F)$ אך $-I + I = 0$ איננה הפיכה.

מה לגבי קבוצת המטריצות שאינן הפיכות? גם היא איננה תת-מרחב
וקטורי, שוב סגירות לחיבור לא מתקיימת – למשל, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
אינן הפיכות אך: $I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ דווקא כן הפיכה.

לא נוכיח – קבוצת המטריצות הסימטריות היא תת-מרחב, וכך גם קבוצת
המטריצות האנטי-סימטריות.

<u>חיתוך של תתי-מרחבים:</u>

יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה F ו-U, W תתי-מרחבים. אזי, $U \cap W$
הוא תת-מרחב.

<u>הוכחה:</u>

נוכיח באמצעות הקריטריון – נראה ששתי התכונות מתקיימות.

א. מכיוון ש-U, W שניהם תתי-מרחבים, $0_V \in U, W$ ולכן – לפי הגדרת
חיתוך – $0_V \in U \cap W$.

ב. יהיו $v_1, v_2 \in U \cap W$ ו-$\alpha \in F$, צ"ל: $\alpha v_1 + v_2 \in U \cap W$.

מכיוון ש: $v_1, v_2 \in U \cap W$, $v_1, v_2 \in U, W$. U, W הם תתי-מרחבים,

ולכן: $\alpha v_1 + v_2 \in U, W$. לפי הגדרת חיתוך, נקבל ש: $\alpha v_1 + v_2 \in U \cap W$, כנדרש.

<u>הערה:</u>

1. נשים לב ש-$U \cap W$ הוא תת-מרחב של V, וגם של U וגם של W.
2. $U \cap W$ הוא תת-המרחב הגדול ביותר שמוכל גם ב-U וגם ב-W.

כלומר, לכל תת-מרחב $T \subseteq W, U$ בהכרח: $T \subseteq U \cap W$.

למשל:

$$\{(0,a,b) : a,b \in \mathbb{R}\} \cap \{(x,0,y) : x,y \in \mathbb{R}\} = \{(0,0,y) : y \in \mathbb{R}\}$$

מה לגבי איחוד? התשובה היא לא בהכרח. למשל:

$$\{(0,0,y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,x,0) : x \in \mathbb{R}\}$$

אין סגירות לחיבור – $(0,0,1), (0,1,0)$ נמצאים באיחוד אך: $(0,0,1) + (0,1,0) = (0,1,1)$ לא נמצא באיחוד.