פתרון תרגיל 4 גיאומטריה אנליטית וזיפרנציאלית תשע"ז

1. נשתמש בנוסחה ל$-s$ וננסה להפוך את הפונקציה שנקבל.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$$

ולכן:

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(x)\|\,dx = \int_0^t \sqrt{4\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx = \int_0^t 2dx = 2t$$

לכן, הפרמטר הטבעי יהיה $t = \frac{s}{2}$, והפרמטריזציה הטבעית:

$$\alpha(s) = \left(1 + 2\cos\frac{s}{2}, -3 + 2\sin\frac{s}{2}\right)$$

(ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t) = \left(1, t\sqrt{2+t^2}\right)$$

ולכן:

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(x)\|\,dx = \int_0^t \sqrt{1 + x^2(2+x^2)}dx = \int_0^t \left(1+x^2\right)dx = \frac{t^3}{3} + t$$

עלינו למצוא את t כביטוי של s.
נתבונן במשוואה:

$$\frac{t^3}{3} + t - s = 0$$

ונפתור אותה באמצעות הנוסחה הכללית למשוואה ממעלה שלישית (אתם לא צריכים לזכור את זה או משהו, הכל בסדר). הפתרון הממשי היחיד הוא:

$$t = \sqrt[3]{\frac{3s}{2} + \sqrt{1 + \frac{9s^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{3s}{2} - \sqrt{1 + \frac{9s^2}{4}}}$$

וזהו הפרמטר הטבעי. כדי למצוא את הפרמטריזציה הטבעית, נציב זאת ב$-\alpha(t)$.

(ג) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t)=\left(1,\sinh\frac{t}{a}\right)$$

ולכן:

$$s(t)=\int_0^t\|\alpha'(x)\|\,dx=\int_0^t\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}dx=\int_0^t\cosh\frac{x}{a}dx=a\sinh\frac{t}{a}$$

לפי הזהות $1+\sinh^2 t=\cosh^2 t$.
נחלץ את t ונקבל: $t(s)=a\cdot arcsinh\frac{s}{a}$. אם נציב זאת ב־$\alpha(t)$, לאחר שנשתמש בזהויות של הפונקציות ההיפרבוליות נקבל:

$$\alpha(s)=\left(a\cdot arcsinh\frac{s}{a},a\sqrt{a^2+s^2}\right)$$

וזוהי הפרמטריזציה הטבעית.

2. אם ניתן, נשתמש בנוסחה לפרמטריזציה טבעית. אחרת, נשתמש בנוסחה הכללית.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t)=(-2\sin t,2\cos t)$$

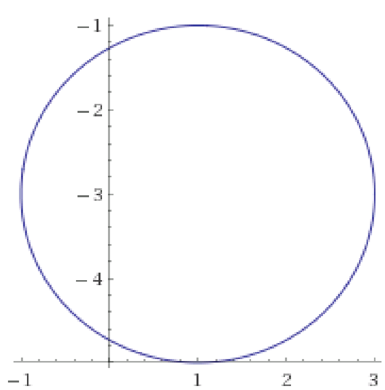
וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\alpha''(t)=(-2\cos t,-2\sin t)$$

ולכן העקמומיות היא:

$$k(t)=\frac{\det(\alpha'(t),\alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}=\frac{\begin{vmatrix}-2\sin t & -2\cos t\\ 2\cos t & -2\sin t\end{vmatrix}}{\left(4\cos^2 t+4\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

זהו מעגל שרדיוסו 2, ולכן הגיוני שעקמומיותו תהיה $\frac{1}{2}$.



(ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t) = \left(1, \sinh\frac{t}{a}\right)$$

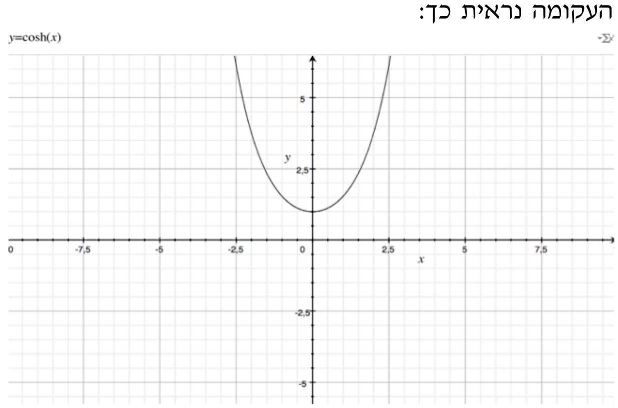
וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\alpha''(t) = \left(0, \frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}\right)$$

ולכן העקמומיות היא:

$$k(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sinh\frac{t}{a} & \frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a} \end{vmatrix}}{\left(1+\sinh^2\frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}}{\cosh^3\frac{t}{a}} = \frac{1}{a\cosh^2\frac{t}{a}}$$

העקומה נראית כך:



(ג) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(s) = (\cos(\phi(s)), \sin(\phi(s)))$$

ולכן:

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\cos^2(\phi(s)) + \sin^2(\phi(s))} = 1$$

וזו אכן פרמטריזציה טבעית.
מכיוון שהפרמטריזציה טבעית, נוכל להשתמש בנוסחה: $k(s) = \|\alpha''(s)\|$.
וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\alpha''(s) = (-\sin(\phi(s)) \cdot \phi'(s), \cos(\phi(s)) \cdot \phi'(s))$$

ולכן:

$$k(s) = \sqrt{(-\sin(\phi(s)) \cdot \phi'(s))^2 + (\cos(\phi(s)) \cdot \phi'(s))^2} = \phi'(s)$$

3. נתבונן בפונקציה $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$\phi(s) = \frac{s^5}{5} + \frac{s^4}{4} + \frac{s^3}{3}$$

לפי הסעיף האחרון בשאלה הקודמת, נקבל שעקמומיותה של העקומה:

$$\alpha(s) = \left(\int_0^s \cos(\phi(u))\, du, \int_0^s \sin(\phi(u))\, du \right)$$

היא $\phi'(s)$, כלומר $s^4 + s^3 + s^2$ כנדרש.

4. נשתמש בנוסחת בייטמן.

(א) הפונקציה היא:

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$F_x = \frac{2x}{a^2}, F_y = \frac{2y}{b^2}$$

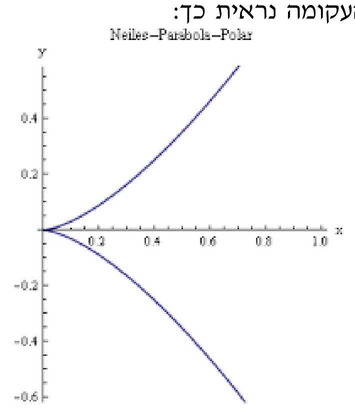
$$F_{xx} = \frac{2}{a^2}, F_{xy} = 0, F_{yy} = \frac{2}{b^2}$$

ולכן:

$$|k| = \frac{\left|F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\right)^3} = \frac{\left|\frac{2}{a^2} \cdot \frac{4y^2}{b^4} + \frac{2}{b^2} \cdot \frac{4x^2}{a^4}\right|}{\left(\sqrt{\frac{4y^2}{b^4} + \frac{4x^2}{a^4}}\right)^3} =$$

$$= \frac{\frac{8}{a^2b^2}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}\right)}{8\left(\sqrt{\frac{y^2}{b^4} + \frac{x^2}{a^4}}\right)^3} = \frac{1}{a^2b^2\left(\sqrt{\frac{y^2}{b^4} + \frac{x^2}{a^4}}\right)^3}$$

(ב) העקומה נראית כך:



הפונקציה היא:

$$F\left(x,y\right)=x^{3}-y^{2}=0$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$F_{x}=3x^{2},F_{y}=-2y$$

$$F_{xx}=6x,F_{xy}=0,F_{yy}=-2$$

ולכן:

$$\left|k\right|=\frac{\left|F_{xx}F_{y}^{2}-2F_{xy}F_{x}F_{y}+F_{yy}F_{x}^{2}\right|}{\left(\sqrt{F_{x}^{2}+F_{y}^{2}}\right)^{3}}=\frac{\left|24xy^{2}-18x^{4}\right|}{\left(\sqrt{9x^{4}+4y^{2}}\right)^{3}}$$

שימו לב שאפשר למצוא פרמטריזציה של העקומות ולחשב את העקמומיות לפי הפרמטריזציה.