מד"ר – תרגול 1

ש"ב יפורסמו באתר של פרופ' שיף

אתר של המתרגלת : www.u.math.ac.il/~RAICHII/Index.html

מייל של מתרגלת : IRINA.RAICHIK@gmail.com

מד"ר

הגדרה

1) משוואה מהצורה $F\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}\right)=0$ נקראת מד"ר מסדר n.
2) פונקציה $y=\varphi(x)$ היא פתרון של המד"ר הנ"ל אם מתקיים $F\left(x,\varphi(x),\varphi'(x),\dots,\varphi^{(n)}(x)\right)$

דוגמאות

1) $2xy'=3y$ סדר ראשון
2) $(y')^2=4y^3+x$ סדר שני
3) $x^2y''+5xy'+6y=0$ סדר שלישי

הגדרה

מד"ר תיקרא ליניארית מסדר n אם אפשר לסדר אותה באופן הבא:

$$F\left(x,y,y',\dots,'y^{(n)}\right)=a_ny^{(n)}+\dots+a_0y+f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_ky^{(k)}+f(x)$$

כאשר המקדמים a_k יכולים להיות קבועים או פונ' של x בלבד.

- אם בנוסף $f(x)=0$, אזי המשוואה נקראת מד"ר ליניארית הומוגנית.

דוגמאות

1) $y'''+x^2y''+y'+y=x^2$ – ליניארית לא הומוגנית.
2) $e^y+y''=0$ – לא ליניארית, הומוגנית.

מד"ר מסדר ראשון

1) שיטת הפרדת המשתנים
2) שיטת וריאציית קבוע

הפרדת המשתנים

הגדרה

מד"ר שניתן להציג אותה בצורה $y' = f(x)g(y)$ נקראת פרידה $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

$$\boxed{\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C}$$

דוגמאות:

1) מצא את הפתרון הכללי של המד"ר: $y' = \frac{x}{y^2+1}$

$$y' = \overbrace{x}^{f(x)} * \overbrace{\frac{1}{y^2+1}}^{g(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = x * \frac{1}{1+y^2}$$

$$\int (y^2+1)dy = \int xdx + C$$

$$\frac{y^3}{3} + y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$2y^3 + 6y = 3x^2 + C$$

2) מצא את הפתרון הכללי של:

$$e^y y' = 2x$$

$$e^y \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\int e^y dy = \int 2xdx + C$$

$$e^y = x^2 + C$$

$$y = \ln(x^2 + C)$$

$$y' = \frac{1}{x^2+C} * 2x$$

$$e^{\ln(x^2+C)} * \frac{2x}{x^2+C} = 2x$$

3) מצא את הפתרון הכללי של המד"ר

$$x^2y^2y' + 1 = y$$

$$y' = \frac{y-1}{x^2y^2} = \frac{1}{x^2} * \frac{y-1}{y^2} = \frac{dy}{dx}$$

$$\int \frac{y^2}{y-1}dy = \int \frac{1}{x^2}dx + C \qquad y \neq 1, x \neq 0$$

$$\int \frac{y^2}{y-1}dy = \int \frac{y^2-1+1}{y-1}dy = \int (y+1)dy + \int \frac{1}{y-1}dy = \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| + C_1$$

$$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C_2$$

הערה

הנחנו בפתרון כי $x \neq 0, y \neq 1$ כעת נבדוק מה קורה עם הם שניהם שווים לזה, כלומר האם הם פתרונות סינגולריים למשוואה:

$$y = 1 \Rightarrow x^2 * 1 * 1' + 1 = 1$$
$$x = 0: y = 1$$

ולכן הפתרון הכללי יכול להיות גם $y = 1$

4) פתור בעיית קושי (או בעיית התחלה)

$$\begin{cases} (x^2-1)y' + 2xy^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
$$(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{-2x}{x^2-1} * y^2$$
$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{2x}{x^2-1} dx + C$$
$$-\frac{1}{y} = -\ln|x^2-1| + C$$
$$\ln|x^2-1| - \frac{1}{y} - C = 0$$
$$y(0) = 1 \Rightarrow C = -1$$
$$\Rightarrow \ln|x^2-1| - \frac{1}{y} + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{\ln|x^2-1| + 1}$$

נבדוק האם יש פתרונות סינגוליים:

$$y = 0 \Rightarrow (x^2-1) * 0 + 2x * 0 = 0$$
$$x = \pm 1 \Rightarrow \pm 2y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

ולכן $y = 0$ הוא פיתרון סינגולרי אבל לא מקיים $y(0) = 1$ תנאי התחלה!

5) $y' = (x+y)^2$

לעיתים מד"ר לא נתונה עם משתנים נפרדים, אך ניתן להגיע למשתנים נפרדים ע"י הצבה:

$$z(x) = x + y \Rightarrow z' = (x+y)' = 1 + y'$$
$$y' = z' - 1 = z^2$$
$$\frac{dz}{dx} = z' = z^2 + 1$$
$$\int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx + C$$
$$\arctan z = x + C$$
$$z = \tan(x + C) = x + y$$
$$y = \tan(x + C) - x$$

הערה:

באופן כללי משוואה מהצורה $y' = f(ax + by + c)$ ניתן להפוך למשוואה פרידה ע"י ההצבה $z = ax + by + c$ ואז $z' = a + by'$ ואז $y' = \frac{z'-a}{b} = f(z)$ ואז $z' = bf(z) + a$.

$$\int \frac{1}{bf(z) + a} dz = \int dx + C$$

שיטת וריאציית הקבוע

תהי (1) $y' = a(x)y + b(x)$ משוואה ליניארית, אם $b(x) \equiv 0$ נקבל משוואה (2) $y' = a(x)y$.
משוואה כזו נקראת משוואה הומוגנית.
משוואה (2) ניתנת לפתרון פשוט ע"י הפרדת משתנים.

$$y = Ce^{\int a(x)dx}$$

כדי לפתור משוואה (1) משתמשים בשיטת וריאציית הקבוע לפי האלגוריתם:

1) מחפשים פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה.
2) מניחים כי קבוע C הוא פונקציה של x, כלומר $C = C(x)$
3) מציבים את הפתרון $Ce^{\int a(x)dx}$ במשוואה (1) ומוצאים את C(x)
4) מקבלים את הפתרון הכללי של המשוואה הלא הומוגנית $y = C(x)e^{\int a(x)dx}$

דוגמאות

1) $y' = \tan(x) * y + \cos(x) = a(x)y + b(x)$

(1) המשוואה ההומוגנית היא :

$$y' = \tan(x)y = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \tan(x)\,dx + C \Rightarrow \ln|y| = -\ln|\cos(x)| + \ln(C)$$

פתרון הומוגני $y = \frac{C}{\cos(x)}$

(2) נניח כי $C = C(x)$ ונחפש פיתרון בצורה $y = \frac{C(x)}{\cos(x)}$

(3) נציב y במשוואה המקורית:

$$\frac{C'(x)}{\cos(x)} + \frac{C(x)\sin(x)}{\cos(x)^2} = \tan(x) * \frac{C(x)}{\cos(x)} + \cos(x)$$

$$C'(x) = \cos^2(x) \Rightarrow C(x) = \int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C_1$$

ולכן הפתרון הכללי של המשוואה הלא הומוגנית הוא $y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C_1\right) * \frac{1}{\cos(x)}$

2) $x(y' - y) = e^x$

$$y' - y = \frac{e^x}{x}$$

(1) נפתור את מ.הומ' : $y' - y = 0$ כלומר

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx + C_1 \Rightarrow \ln|y| = x + C_1 \Rightarrow y = e^{x+C_1} = Ce^x$$

(2) נחפש פתרון בצורה $y = C(x)e^x$

(3) נציב במשוואה מקורית:

$$x(C'(x)e^y + C(x)e^x - C(x)e^x) = e^x$$

$$C'(x) = \frac{1}{x}$$

$$C(x) = \ln|x| + C_2$$

$$y = (\ln|x| + C_2)e^x$$

3) $(1+y^2)dx = \left(\sqrt{1+y^2}\sin(y) - xy\right)dy$

נשים לב שהמשוואה הזו ליניארית לגבי x.

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{1+y^2}x + \frac{\sin(y)}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$x' = -\frac{y}{1+y^2}x$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{y}{1+y^2}dy + C$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \ln(C) = \ln(y^2+1)^{-\frac{1}{2}} + \ln(C) \Leftrightarrow x = C(y^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

נחפש פתרון כללי בצורה $x = C(y)(y^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

$$\left(C(y)(y^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{y}{1+y^2}C(y)(y^2+1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\sin(y)}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$C'(y)(y^2+1)^{-\frac{1}{2}} + C(y)\frac{-1}{2}(y^2+1)^{-\frac{3}{2}}2y = -\frac{y}{1+y^2}C(y)(y^2+1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\sin(y)}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$C'(y) = \sin(y) \Rightarrow C(y) = -\cos(x) + C_1$$

$$x = \frac{-\cos(y) + C_1}{\sqrt{y^2+1}}$$