

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 8: בור אינסופי, אוסילטור קוונטי, אופרטורים

1. חלקיק בעל מסה m נמצא בבור פוטנציאל אינסופי בתחום $|x| \leq a/2$.

(א) מצאו את 2 רמות האנרגיה הנמוכות ביותר ואת המצבים העצמיים המתאימים.

ב $t = 0$ החלקיק נמצא במצב המתואר ע"י $\psi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$ כאשר $\phi_1(x), \phi_2(x)$ המצבים העצמיים שמצאתם ב (א1).

(ב) מצאו את תוחלת האנרגיה ביחס ל $\psi(x)$.

(ג) מהי ההסתברות למצוא את החלקיק בחצי הימני של הבור ב $t = 0$?

(ד) מצאו את פונקציית הגל התלויה בזמן $\psi(x, t)$ ואת $|\psi(x, t)|^2$. הביעו תשובתכם באמצעות ϕ_1, ϕ_2, E_1, E_2 .

(ה) באילו זמנים ההסתברות למצוא את החלקיק בחצי הימני של הבור מקסימלית ? מהי הסתברות זו ?

2. ההמילטוניאן של חלקיק בפוטנציאל הרמוני נתון ע"י $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. המצבים העצמיים מתקבלים ע"י $\mathcal{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$.

(א) באמצעות סימוני דיראק והצגת היחידה $1 = \int dx |x\rangle\langle x|$ הראו כי

$$(1) \quad \int dx' \langle x | \mathcal{H} | x' \rangle \psi(x') = E\psi(x)$$

(ב) i. הוכיחו (באינדוקציה) כי

$$(2) \quad \int \delta^{(n)}(x - x') f(x) dx = (-1)^n \int \delta(x - x') f^{(n)}(x) dx$$

כאשר $f(x) \in C^\infty$ פונקציית מבחן.

ii. קחו $f(x) = (x - x')^n g(x)$, $g(x) \in C^\infty$ והשתמשו ב (2) כדי להראות כי

$$(3) \quad (x - x')^n \delta^{(n)}(x - x') = (-1)^n n! \delta(x - x').$$

(ג) הראו כי אלמנטי המטריצה $\langle x|\mathcal{H}|x'\rangle$ נתונים ע"י

$$(4) \quad \langle x|\mathcal{H}|x'\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(x-x') + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \delta(x-x')$$

(הדרכה: כתבו תחילה את אלמנטי המטריצה $\langle x|[x,p]|x'\rangle$ והראו כי $(x-x')\langle x|p|x'\rangle = i\hbar\delta(x-x')$. כעת כתבו את אלמנטי המטריצה $\langle x|[x,p^2]|x'\rangle$ והעזרו בנוסף בתוצאה (3) ובתכונת הקומוטטורים $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$. $\langle x|p^2|x'\rangle$ כדי לחשב את $A[B, C] + [A, C]B$.)

(ד) העזרו ב (1), (2) וב (4) על מנת לקבל את משוואת שרדינגר של אוסילטור הרמוני בהצגת המקום

$$(5) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x)$$

3. חלקיק בעל מסה m הנמצא בבור פוטנציאל הרמוני מתואר ע"י $|\psi\rangle = 5|0\rangle + 3|1\rangle + |2\rangle$ כאשר $\{|n\rangle\}$ המצבים העצמיים של ההמילטוניאן המתאים.

(א) מהי ההסתברות למצוא את החלקיק במצב $|2\rangle$?

(ב) מהי תוחלת האנרגיה ?

(ג) חשבו את $\langle x^2 \rangle$, $\langle p^2 \rangle$.

4. האופרטור המתאר גודל פיזיקלי נתון ע"י:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(א) מהם הערכים האפשריים במדידת הגודל הפיזיקלי המתאים לאופרטור A ?

(ב) אם מצב המערכת נתון ע"י הוקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, מהם הערכים האפשריים במדידת A ובאילו הסתברויות הם מתקבלים (שימו לב, הוקטור אינו מנורמל)?

(ג) אם מצב המערכת נתון ע"י הוקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, מהם הערכים האפשריים במדידת A ובאילו הסתברויות הם מתקבלים?

(ד) גודל פיזיקלי אחר מתואר ע"י האופרטור

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 7 & 3 & -8 \\ -5 & -8 & 15 \end{pmatrix}$$

אם מודדנו כרגע את הגודל הפיזיקלי המתאים ל B וקיבלנו שתוצאת המדידה היא 2, מה ייתקבל אם נמדוד עכשיו את A ?

5. נתונה מערכת עם שלושה מצבים כאשר ההמילטוניאן H ואופרטור נוסף המתאר את המערכת A נתונים ע"י המטריצות

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A = \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) מהם הערכים האפשריים המתקבלים במדידה של A ?

(ב) מהם הערכים האפשריים המתקבלים במדידה של H ?

(ג) מכינים את המערכת במצב $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. מהם הערכים האפשריים המתקבלים במדידה של H ובאילו הסתברויות הם מתקבלים?

(ד) מבצעים מדידה של A וכעבור זמן t מבצעים מדידה של H . בהנחה שבמדידה הראשונה מתקבל הערך הגדול ביותר של A , מצאו את ערך התצפית של המדידה השנייה.