שאלה על נגזרות של שדות וקטוריים:

תהי הספירה $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$ עם הפרמטריזציה
$\chi(\theta,\varphi)=(\cos\theta\sin\varphi\,,\sin\theta\sin\varphi\,,\cos\varphi)$ $(0\le\theta\le 2\pi$ ו- $0\le\varphi\le\pi)$ זוהי פרמ' כמשטח
סיבוב של המסילה $\gamma(t)=(\sin t\,,0,\cos t)$ $(0\le t\le\pi)$.

יהיו השדות הוקטוריים $V(\theta,\varphi)=(-\sin\theta\sin\varphi\,,\cos\theta\sin\varphi\,,0)$ ו-
$W(\theta,\varphi)=(0,1,-\sin\theta\tan\varphi)$ חשבו את $[V,W]$ (הסוגרים של לי).

הדרך הכי קלה היא לחשב את הנגזרות הקווריאנטיות שהרי $[V,W]=\nabla_V W-\nabla_W V$,
נתחיל בחקר המשטח:

$$\chi_\theta=\chi_1=(-\sin\theta\sin\varphi\,,\cos\theta\sin\varphi\,,0)\,,\chi_\varphi=\chi_2=(\cos\theta\cos\varphi\,,\sin\theta\cos\varphi\,,-\sin\varphi)$$

ונסמן $W(\theta,\varphi)=W^1\chi_\theta+W^2\chi_\varphi$ ואז, לפי האיבר השלישי בווקטורים,
$-\sin\theta\tan\varphi=-\sin\varphi\,W^2$ ולכן $W^2=\frac{\sin\theta}{\cos\varphi}$ לפי האיבר הראשון
$0=\cos\theta\cos\varphi\frac{\sin\theta}{\cos\varphi}-\sin\theta\sin\varphi\,W^1$ ולכן $W^1=\frac{\cos\theta}{\sin\varphi}$ חישוב האיבר השני יראה שאכן
$W(\theta,\varphi)=\frac{\cos\theta}{\sin\varphi}\chi_\theta+\frac{\sin\theta}{\cos\varphi}\chi_\varphi$ ובפרט W אכן שדה ווקטורים משיקים.

V לעומת זאת פשוט שווה ל- χ_θ ולכן מיידית $V^1=1$ ו- $V^2=0$.

לפי הנוסחאות לסימני קריסטופל של משטחי סיבוב $\Gamma_{11}^2=-f'f=-\sin\varphi\cos\varphi$,
$\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1=\frac{f'}{f}=\cot\varphi$ והיתר הם 0.

לפי הנוסחא לנגזרת קווריאנטית $\nabla_W V=\left(\frac{\partial V^m}{\partial x_i}+\Gamma_{ij}^m V^j\right)W^i\chi_m$ (כאשר $x_1=\theta$ ו- $x_2=\varphi$)
מכיוון ש $V^1=1$ ו- $V^2=0$:

$$\frac{\partial V^1}{\partial\theta}=\frac{\partial V^1}{\partial\varphi}=\frac{\partial V^2}{\partial\theta}=\frac{\partial V^2}{\partial\varphi}=0$$

ואם נציב את אלה בנוסחא נקבל $\nabla_W V=\Gamma_{i1}^m W^i\chi_m$ אם נציב את ערכי קריסטופל נקבל

$$\nabla_W V=\cot\varphi\,W^2\chi_1-\sin\varphi\cos\varphi\,W^1\chi_2=\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\chi_1-\cos\theta\cos\varphi\,\chi_2$$

בדומה $\nabla_V W=\left(\frac{\partial W^m}{\partial x_i}+\Gamma_{ij}^m W^j\right)V^i\chi_m$ ואם נציב את ערכי V^i נקבל
$\nabla_V W=\left(\frac{\partial W^m}{\partial\theta}+\Gamma_{1j}^m W^j\right)\chi_m=\left(\frac{\partial W^1}{\partial\theta}+\Gamma_{1j}^1 W^j\right)\chi_1+\left(\frac{\partial W^2}{\partial\theta}+\Gamma_{1j}^2 W^j\right)\chi_2$. אם נציב

$$W^1=\frac{\cos\theta}{\sin\varphi}\,,W^2=\frac{\sin\theta}{\cos\varphi}\,,\frac{\partial W^1}{\partial\theta}=-\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\,,\frac{\partial W^2}{\partial\theta}=\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}$$

ואת ערכי קריסטופל נקבל

$$\nabla_V W=\left(-\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}+\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right)\chi_1+\left(\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}-\cos\theta\cos\varphi\right)\chi_2$$

בפרט

$$[V,W] = \nabla_V W - \nabla_W V = \frac{\cos\theta}{\cos\varphi}\chi_2 - \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\chi_1$$

כהערת אגב, את השדה W מצאתי בעזרת פרמטריזציה אחרת של הספירה –

$\tilde{\chi}(x,y) = \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)$. W הוא השדה $\tilde{\chi}_y = \left(0,1,\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$ שכן אם נשווה בין הפרמ' $x = \cos\theta\sin\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$ ולכן $\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{\cos^2\varphi} = \cos\varphi$ ואז

$$\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = -\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\sin\theta\tan\varphi$$

שדות נגזרות כיווניות מפרמטריזציות שונות הן דרך יחסית פשוטה למצוא דוגמא לסוגרי לי שלא מתאפסים.