אינפי׳ II תירגולים - תרגיל VII

שיטות אינטגרציה בחישוב אינטגרל מסוים

I משפט (אינטגרציה בחלקים): אם u,v גזירות ברציפות ב-$[a,b]$ אזי:

$$\int_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,dx$$

II משפט (הצבה): יהיו $u:[a,b]\longrightarrow Im(u)$ כך גזירה ו-f רציפה ב-$Im(u)$. אזי:

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx \underset{t:=u(x)}{=} \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt$$

הערות לגבי שיטת ההצבה:

א. לשים ♡ לשנות את גבולות האינטגרל יחד עם החלפת המשתנים!

ב. אין צורך לחזור למשתנה המקורי, כיוון שאנו מעוניינים בתשובה מספרית (שאינה תלויה במשתנה האינטגרציה)

תרגילים

חשבו את האינטגרלים המסוימים הבאים:

א.
$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln(x)\cdot\sin(\ln x+1)}{x}\,dx$$

נציב $t:=\ln x+1$, $dt=\frac{1}{x}dx$ $\Leftarrow$

$\frac{1}{e} \longmapsto \ln\left(\frac{1}{e}\right)+1=0$ (גבול תחתון)

$e \longmapsto \ln(e)+1=2$ (גבול עליון)

אחרי ההצבה ושינוי גבולות נקבל:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln(x)\sin(\ln x+1)}{x}\,dx = \int_0^2 (t-1)\sin t\,dt = (t-1)(-\cos t)\Big|_0^2 + \int_0^2 \cos t\,dt$$

אינטגרציה בחלקים

$$\begin{bmatrix} u=t-1 & v=-\cos t \\ u'=1 & v'=\sin t \end{bmatrix}$$

$$= (1-t)\cos t\Big|_0^2 + \sin t\Big|_0^2 = -\cos(2)-\cos(0)+\sin 2-\sin 0 = -\cos 2-1+\sin 2$$

ג. $$\int_e^{e^3} |x^2-5x+6|\,dx$$

נשים לב כי

$$|x^2-5x+6| = \begin{cases} x^2-5x+6, & x\le 2 \ \vee\ x\ge 3 \\ -x^2+5x-6, & 2<x<3 \end{cases}$$

כעת $2<e<3<e^3$. לכן לפי הגדרת ערך מוחלט:

$$\int_e^{e^3} |x^2-5x+6|\,dx = \int_e^3 (-x^2+5x-6)\,dx + \int_3^{e^3} (x^2-5x+6)\,dx \underset{\text{חישוב}}{=} \ldots =$$

$$= -9 + \frac{19}{3}e^3 - \frac{5}{2}e^2 + 6e + \frac{1}{3}e^9 - \frac{5}{2}e^6$$

ד. $$\int_{-\frac12}^{\frac12} \cos x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$$

ראשית, תחום ההגדרה של $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ הוא $-1<x<1$, אם כן הפונקציה רציפה ולכן אינטגרבילית ב-$[-\frac12,\frac12]$. בנוסף, $\cos(\cdot)$ היא זוגית ו-$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ אי זוגית, ולכן $\cos x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ היא אי זוגית ב-$(-1,1)$ ובפרט

$$\int_{-\frac12}^{\frac12} \cos x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = 0$$

תרגיל

תהי f רציפה. הוכיחו כי $$\int_0^x \left[\int_0^t f(u)\,du\right] dt = \int_0^x f(u)(x-u)\,du$$

כיוון ש-$f(u)$ אינטגרבילית כי רציפה, (בפרט בכל קטע סגור), נגדיר $F(t)=\int_0^t f(u)\,du$ (שהיא רציפה מהמשפט היסודי) ומתקיים $F'(t)=f(t)$.

$$\Rightarrow \int_0^x \left[\int_0^t f(u)\,du\right] dt = \int_0^x F(t)\,dt \underset{\substack{\text{אינטגרציה בחלקים} \\ u=F(t) \quad v=t \\ u'=f(t) \quad v'=1}}{=} tF(t)\Big|_0^x - \int_0^x t f(t)\,dt =$$

$$= xF(x) - \int_0^x t f(t)\,dt \underset{\substack{\text{החלפת משתנה} \\ u=t}}{=} xF(x) - \int_0^x u f(u)\,du = x\cdot\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x u f(u)\,du =$$

$$= \int_0^x x f(u)\,du - \int_0^x u f(u)\,du \underset{\text{לינאריות}}{=} \int_0^x (x-u) f(u)\,du \quad \square$$

<u>אינטגרלים לא אמיתיים (מוכללים) - סוג I</u>

<u>הגדרה</u>

⊛ יהי a קבוע. תהי f אינט' בכל קטע $[a,b]$ (לכל $b>a$). נסמן $\Psi(b):=\int_a^b f\,dx$.

$$\int_a^\infty f\,dx := \lim_{b\to\infty}\Psi(b) = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f\,dx$$

- נאמר ש-f אינטגרבילית בקרן $[a,\infty)$ אם ההגדרה מתקיימת והגבול קיים (במובן הצר)

⊛ יהי a קבוע. תהי f אינט' בכל קטע $[b,a]$ (לכל $b<a$).

$$\int_{-\infty}^a f\,dx := \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f\,dx$$

- נאמר ש-f אינטגרבילית בקרן $(-\infty,a]$ אם ההגדרה מתקיימת והגבול קיים (במובן הצר)

⊛ תהי f אינט' בכל קטע סגור.

$$\int_{-\infty}^\infty f\,dx := \int_{-\infty}^0 f\,dx + \int_0^\infty f\,dx$$

- f אינט' ב-$(-\infty,\infty)$ אם ההגדרה מתקיימת והגבול קיים (במובן הצר)

<u>תכונות חשובות</u>

(I) לכל נק' c מתקיים: $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$

(II) מספיק שאחד האינטגרלים בצד ימין יתבדר כדי שהאינטגרל בשמאל יתבדר

(III) $(a>0)$ $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס $\iff$ $\alpha>1$

<u>דוגמא</u>

$$\int_1^\infty \cos x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \cos x\,dx = \lim_{b\to\infty} \sin x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\sin b - \sin 1)$$

לא קיים!

תרגיל

נוכיח את (III): $(a>0)$ $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס $\iff \alpha>1$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha}$$

יהי $a>0$.

אז נחשב את $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha}$:

$$\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \int_a^b x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \left.\dfrac{1}{-\alpha+1}\cdot x^{-\alpha+1}\right|_a^b, & \alpha\neq 1 \\ \ln|x|\Big|_a^b, & \alpha=1 \end{cases} = \begin{cases} \left.\dfrac{-1}{(\alpha-1)\,x^{\alpha-1}}\right|_a^b, & \alpha\neq 1 \\ \ln|x|\Big|_a^b, & \alpha=1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-1}{(\alpha-1)\,b^{\alpha-1}} + \dfrac{1}{(\alpha-1)\,a^{\alpha-1}}, & \alpha\neq 1 \\ \ln b-\ln a, & \alpha=1 \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{b^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{a^{\alpha-1}}\right), & \alpha\neq 1 \\ \ln b-\ln a, & \alpha=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty}\left[-\dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{b^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{a^{\alpha-1}}\right)\right], & \alpha\neq 1 \\ \lim\limits_{b\to\infty}\left(\ln b-\ln a\right), & \alpha=1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty}\left[-\dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{b^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{a^{\alpha-1}}\right)\right], & \alpha>1 \\ \lim\limits_{b\to\infty}\left[-\dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{b^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{a^{\alpha-1}}\right)\right], & \alpha<1 \\ \lim\limits_{b\to\infty}\left(\ln b-\ln a\right), & \alpha=1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{(\alpha-1)\,a^{\alpha-1}}, & \alpha>1 \\ \infty, & \text{ש/ס} \end{cases}$$

ולכן האינטגרל מתכנס $\iff \alpha>1$

תרגיל

חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2}\,dx$

נשתמש בהחלפת משתנים $t=\arctg x \longmapsto dt = \frac{1}{1+x^2}\,dx$

נבדוק את החלפת הגבולות באינטגרל הלא תקין:

גבול עליון: $x \longrightarrow \infty \longmapsto \arctg x \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$

גבול תחתון: $x \longrightarrow -\infty \longmapsto \arctg x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{\pi}{2}$

ובסה"כ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\,dt = 0$$

אינטגרל של פ' אי זוגית בתחום סימטרי סביב 0

שאלה:

האם ניתן להסיק מהתרגיל האחרון כי לכל $f(x)$ אי זוגית $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$?

ממש לא! זה נכון לסכום של אינטגרלים כאשר כל אחד מהם שואף ל- $\pm\infty$ אז

נוכל לקבל כעת:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_{0}^{\infty} x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} x\,dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{b} = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} -\frac{a^2}{2}}_{-\infty} + \underbrace{\lim_{b\to\infty} \frac{b^2}{2}}_{\infty}$$

שניהם מתבדרים.

תרגיל

חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} x e^{-x}\,dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x e^{-x}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} x e^{-x}\,dx$$

נחשב את האינטגרל הלא מסוים (הזה קודם):

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} \ (+c)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{אינט' בחלקים}} \\ u=x & v=-e^{-x} \\ u'=1 & v'=e^{-x} \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx = -\lim_{a\to-\infty}\left[xe^{-x}+e^{-x}\Big|_a^0\right] =$$

$$= -\lim_{a\to-\infty}\left(1-ae^{-a}-e^{-a}\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(e^{-a}(a+1)-1\right) = -\infty$$

לכן האינטגרל אינו מתכנס

מבחני התכנסות

מבחן ההשוואה הראשון

בהינתן $\forall x\in(a,\infty):\ 0\le g(x)\le f(x)$ אזי מתקיים:

(I) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנס

(II) $\int_a^\infty g(x)\,dx=\infty$ $\Leftarrow$ $\int_a^\infty f(x)\,dx=\infty$

תרגיל

קבעו את ההתכנסות של $I=\int_1^\infty x^{-x}dx$

נשים לב כי $\forall x>2:\ x^2<x^x \Rightarrow x^{-2}>x^{-x}\ (\forall x>2)$

ומסקנה (III) של אינט' לכן משפ"ים (סעיף I) מתקיים $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$ מתכנס, ולכן לפי

מבחן ההשוואה הראשון גם $\int_2^\infty x^{-x}dx$ מתכנס. האינטגרל $\int_1^2 x^{-x}dx$ מתכנס כי

כמו אינטגרל מסוים של פונ' רציפה בקטע (ולא אינט')

$\Leftarrow$ $I=\int_1^2 x^{-x}dx+\int_2^\infty x^{-x}dx$ מתכנס

תרגיל

קבעו התכנסות של $\int_1^\infty \frac{e^{\sin x}}{x}dx$

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ -1\le \sin x\le 1 \Rightarrow \frac{1}{ex}\le\frac{e^{\sin x}}{x}\le\frac{e}{x}$$

ומסקנה (II) נקבל כי $\int_1^\infty \frac{1}{ex}dx$ מתבדר ולכן ממבחן ההשוואה הראשון גם $\int_1^\infty \frac{e^{\sin x}}{x}dx$

תרגיל (מבחן 2010)

חשבו את (הגבול) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x \cos\frac{1}{t}\,dt$

נשים לב שהפונ' $\cos\frac{1}{t}$ חיובית מונו' עולה ב-$[1,\infty)$ ומקיים

$$0\le\cos 1\le\cos\frac{1}{t}$$

כלומר

$$\infty=\int_1^\infty\cos 1\,dt\le\int_1^\infty\cos\frac{1}{t}\,dt$$

ולכן $\int_1^\infty\cos\frac{1}{t}\,dt$ מתבדר. נסמן $F(x)=\int_1^x\cos\frac{1}{t}\,dt$, אזי לפי המשפט היסודי של אינפי מתקיים $F'(x)=\cos\frac{1}{x}$ ונשתמש בלופי׳:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x\cos\frac{1}{t}\,dt}{x}\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{\text{לופי׳}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=\cos 0=1$$

משפט ההשוואה הגבולי

תהיינה $f(x)$, $\forall x\in[a,\infty): 0\le g(x)$ וקיים הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

נסמן $I_f:=\int_a^\infty f(x)\,dx$, $I_g:=\int_a^\infty g(x)\,dx$. אזי:

I. אם $0<L<\infty$: אזי I_g, I_f מתכנסים/מתבדרים ביחד ("חברים")

II. אם $L=0$: אזי אם I_g מתכנס $\Leftarrow$ I_f מתכנס

III. אם $L=\infty$: אזי I_f מתכנס $\Leftarrow$ I_g מתכנס

תרגיל

קבע התכנסות של $\int_1^\infty\frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$

נעזר במבחן ההשוואה הגבולי ע"י השוואה לפו' $\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+\frac{5}{x}}=\frac{1}{2}$$

ולכן ממבחן ההשוואה הגבולי (חברים) האינטגרל שלנו ו-$\int_1^\infty\frac{1}{x}dx$ חברים, וכיוון ש-$\int_1^\infty\frac{dx}{x}$ מתבדר אזי גם האינטגרל שלנו.

תרגיל (מבחן 2009)

א. חשבו במפורש את $f(x)=\int_0^\infty e^{-tx}dt$

ב. הוכיחו כי האינטגרל $\int_0^\infty t^n e^{-tx}dt$ מתכנס לכל $n\in\mathbb{N}$, $x>0$

ג. היעזרו ב-f כדי להוכיח את השוויון $n!=\int_0^\infty t^n e^{-t}dt$

א. הפונ' $g(t)=e^{-tx}$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכן נשתמש בניוטון-לייבניץ:

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-tx}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-tx}dt=\lim_{b\to\infty}-\frac{1}{x}e^{-tx}\Big|_0^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}e^{-bt}+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$$

ב. יהיו $n\in\mathbb{N}, x>0$. נשים לב כי $\int_0^\infty t^ne^{-tx}dt=\int_0^1 t^ne^{-tx}dt+\int_1^\infty t^ne^{-tx}dt$

עבור $\int_0^1 t^ne^{-tx}dt$ הפונ' $g(t)=t^ne^{-tx}$ רציפה ב-$[0,1]$ עבור n ו-x קבועים ולכן $g(t)$ אינט' שם.

עבור $\int_1^\infty t^ne^{-tx}dt$ נבדוק מבחן השוואה גבולי עם $\frac{1}{t^2}$:

$$L(x,n)=\lim_{t\to\infty}\left|\frac{t^ne^{-tx}}{\frac{1}{t^2}}\right|=\lim_{t\to\infty}t^{n+2}e^{-tx}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^{n+2}}{e^{tx}}=0$$

לכן, כיוון ש-$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt$ מתכנס אז גם $\int_1^\infty t^ne^{-tx}dt$ מתכנס, ולכן הכל מתכנס. $\square$

ג. נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\frac{1}{x}=\int_0^\infty e^{-tx}dt\underset{\left[\begin{smallmatrix}u=e^{-tx} & v=t\\ u'=-xe^{-tx} & v'=1\end{smallmatrix}\right]}{=}te^{-tx}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty xte^{-tx}dt=\lim_{b\to\infty}te^{-tx}\Big|_0^b+\int_0^\infty xte^{-tx}dt=$$

0 לופיטל חוזר

$$=\lim_{b\to\infty}te^{-tb}+\int_0^\infty xte^{-tx}dt=x\int_0^\infty te^{-tx}dt\underset{\left[\begin{smallmatrix}u=e^{-tx} & v=\frac{t^2}{2}\\ u'=-xe^{-tx} & v'=t\end{smallmatrix}\right]}{=}x\left[\overbrace{\frac{t^2e^{-tx}}{2}\Big|_0^\infty}^{0}+\int_0^\infty\frac{xt^2e^{-tx}}{2}dt\right]=$$

$$=\frac{x^2}{2}\int_0^\infty t^2e^{-tx}dt\underset{\left[\begin{smallmatrix}u=e^{-tx} & v=\frac{t^3}{3}\\ u'=-xe^{-tx} & v'=t^2\end{smallmatrix}\right]}{=}\frac{x^2}{2}\left[\frac{t^3e^{-tx}}{3}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty\frac{xt^3e^{-tx}}{3}dt\right]\underset{\text{לופיטל חוזר}}{=}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\int_0^\infty t^3e^{-tx}dt=$$

$$=\ldots=\frac{x^n}{n!}\int_0^\infty t^ne^{-tx}dt$$

נציב $0<x=1$ ונקבל $\frac{1}{x}=1=\frac{1}{n!}\int_0^\infty t^ne^{-tx}dt$ $\square$