הרצאה XV- אינפי 1

נקודת אי רציפות סליקה: $\exists f(x-x_0)=f(x+x_0)\neq f(x_0)$. אם נדחוף את הנקודה הנ"ל לתוך הפונקציה נקבל פונקציה רציפה.

היפוך של פונקציה: פונקציה הפוכה: $f: A\to B$ ואומרים שהפונקציה היא על B אם מתקיים *f(A)=B*. היא חח"ע אם עבור *x,y* שונים מתקבלים ערכים *f(x),f(y)* שונים. כל פונקציה שהיא חח"ע ועל מקיימת כי $\forall y\in B\ \exists!\, x\in A: y=f(x)$ נגדיר $x:=f^{-1}(y)$.

הגדרה: $f\nearrow$ ממש, אזי $x<y \iff f(x)<f(y)$ ולהיפך, אם $f\searrow$ ממש, אזי $x<y \iff f(x)>f(y)$.

משפט: $f:<a,b>\to R$ נניח ש*f* רציפה. אז *f* חח"ע אר"א *f* מונוטונית ממש.

הוכחה: בכיוון $\Rightarrow$ הזה טריויאלי. הוכחנו משהו דומה בהרצאה קודמת.

בכיוון השני $\Leftarrow$: נניח לא מונוטונית ממש. ז"א שקיימים $x_1<x_2, x_1,x_2\in<a,b>\Longrightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$ ובאופן דומה מתקיים עבור שתי ערכים אחרים $x_3<x_4, x_3,x_4\in<a,b>\Longrightarrow f(x_3)\geq f(x_4)$. מכאן ש$\exists \alpha,\beta,\gamma\in\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ כך ש$\alpha<\beta<\gamma$ וגם מתקיים $f(\beta)\geq f(\alpha)\ and\ f(\beta)\geq f(\gamma)$ לכן קיים t שמקיים או $t\in(f(\alpha),f(\beta))$ או $t\in[f(\gamma),f(\beta)]$. אבל מאחר וf רציפה, היא מקבלת את כל הערכים הבינוניים. לכן $\exists c_1\in[\alpha,\beta], f(c_1)=t$ וגם $\exists c_2\in[\beta,\gamma], f(c_2)=t$ וזה בסתירה לחח"ע.

משפט: על פונקציה הפוכה לפונקציה מונוטונית. תהי $f:[a,b]\to R$ נניח ש *f* מונוטונית ממש וf רציפה בקטע *[a,b]*.

1. אז $f:[a,b]\to[c,d]$ כך ש*f* על. ז"א מגדירים $f[a,b]=[c,d]$ ונגדיר $c=\inf f[a,b], \mathrm{d}=\sup f[a,b]$ אם *f* עולה מונוטונית ממש. (ולהיפך אם היא יורדת).
2. פונקציה הפוכה $f^{-1}:[c,d]\to[a.b]$ מונוטונית ורציפה.

הוכחה: מספיק להתבונן רק במקרה של פונקציה עולה. קודם כל ברור ש$c\leq f(x)\leq d$ לכל *x* ב*[a,b]*. *f* רציפה, לכן לפי משפט *Weierstrass* קיים $x_{max}\in[a,b]: f(x_{max})=d$ וגם $x_{min}\in[a,b]: f(x_{min})=c$. מתקיים $x_{max}=b$ וגם $x_{min}=a$ לכן הפונקציה היא $f:[a,b]\to[f(a),f(b)]$. לכן מתקיים $f^{-1}:[x,d]\to[a,b]$ נניח $y_1,y_2\in[c,d]: y_1<y_2$ וגם נגדיר כדי שיתקיים עבורם $f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2$ מכאן שבהכרח $x_1<x_2$ לסיכום $y_1<y_2$ גורר $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$. מכאן נובע כי f^{-1} מונוטונית, ומקבל כל ערכים בינוניים, ולכן לפי המשפט מהרצאה קודמת f^{-1} רציפה.מ.ש.ל.

פונקציות אלמנטריות:

1. $\exp x=e^x$. $x\in R$ ונגדיר: $\exp x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

טענה: הטור מתכנס בהחלט. נבדוק אם מתקיים $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}<\infty$. מתקיים ע"פ מבחן קושי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}}$ ידוע כי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$, ז"א שלכל *E* ממשי מתקיים כי $\sqrt[n]{n!}>\mathrm{E}$ ולכן $\frac{n!}{E^n}>1$ ולכן $\frac{n!}{E^n}>1$: $\exists\bar{n}\forall n\geq\bar{n}$ ומכאן $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$, ולכן הטור מתכנס בהחלט, ולכן מתכנס.

תכונות של *exp x*:

1. *exp (0) =1*.
2. $\exp x\exp y=\exp(x+y)$.

הוכחה ל2: $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \exp y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}$ וע"פ הגדרת מכפלת טורים מתקבל $\exp x \exp y = \sum_{n+m=N}\frac{x^n}{n!}\frac{x^m}{m!}$ נכפיל ונחלק ב*N!*, ולכן נקבל $\exp x \exp y = \frac{1}{\mathrm{N}!}\underbrace{\sum_{n+m=N}\frac{N!\,x^n}{n!}\frac{x^m}{m!}}_{(x+y)^N}$ ומכאן $\exp x \exp y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^N}{N!} = \exp(x+y)$. מ.ש.ל.

3. $\exp(-x)\exp x = 1$ ומכאן $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ לכל *x*.

מכאן ש*exp(x)* היא חזקה, וניתן לסמנה ע"י e^x. התכונות שסימנו מתקיימות וגם ניתן לראות e = $\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

ב*x=0* מתקיים $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. נגדיר עבור

$|x| < 1$: $|r_k| \le \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!} = |x|^{k+1}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{|x|^{n-k-1}}{n!} \le |x|^{k+1}\frac{1}{1-|x|}$. קיבלנו $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + r_k$.

ומתקיים $|r_k| \le |x|^{k+1}\frac{1}{1-|x|}$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{|r_k|}{|x|^k} = 0$ וע"פ הסימונים של לנדאו $r_k = o(x^k)$.

<u>משפט</u>: $\lim_{n\to\infty}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

הוכחה: $e^x = 1 + x + o(x)$, לכן $\lim_{n\to\infty}\frac{e^x-1-x}{x} = 0$ ומכאן רואים ע"פ אריתמטיקה של גבולות שהגבול הוא אכן 1.

4. $e^x > 1$, $x > 0$ או כמו כן מתקיים $e^x < 1$, $x < 0$. מה קורה ב$x = \pm\infty$? $e^x \ge \frac{x^m}{m!}$ לכל *m* שנבחר.

מסקנה: לכן מיידית ניתן לראות שהגבול $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$. עבור $-\infty$ מתקיים $\lim_{x\to-\infty} e^x = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} e^x} = 0$.

תכונה מיוחדת: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\mathrm{x}^\mathrm{n}} = +\infty$: $\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}$. הוכחה: *m=n+1*. $e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ ולכן $\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$ ולכן שואף לאינסוף. מכאן נובע ישירות כי $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$.

<u>משפט</u>: $exp: (-\infty,\infty) \to (0,\infty)$ מונוטונית ממש.

הוכחה: *x<y* לכן *exp(y-x)>1*. מכאן $e^y > e^x$. מ.ש.ל.

<u>לוגריתם</u>: $ln = \exp^{-1}$. $ln: (0,\infty) \to (-\infty,\infty)$. מתקיים $\exp(\ln t) = t$ וגם $\ln(\exp x) = x$. תכונות של לוגריתם דומות לאלו של ה*exp* ולכן

1. $\ln xy = \ln x + \ln y$.
2. *ln* עולה מונוטונית ממש.
3. $\lim_{x\to 0+0}\ln x = -\infty, \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$.
4. *ln(1)=0*

<u>משפט</u>: $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

הוכחה: נגדיר: $\ln(1+t) = x$ מתקיים $\lim_{t\to 0}\ln(1+t) = 0$, ומכאן $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1} = 1$. כמו כן ניתן לרשום באופן כללי $\ln(1+t) = t + o(t), t \to 0$.

<u>משפט</u>: *exp, ln* פונקציות רציפות.

הוכחה: בעצם צריך להוכיח שעבור x_0 כללית מתקיים $\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$. נגדיר $\lim_{y\to 0} e^y = 1 \overset{\{y=x-x_0\}}{\cong} \lim_{x\to x_0} e^{x-x_0}$. מכאן

שמתקיים $\frac{e^x}{e^{x_0}} = 1$ ומכאן נובע הדרוש. מ.ש.ל. לפי המשפט שהוכחנו היום וע״פ זה שאנו יודעים כי *exp (x)* מונוטונית ורציפה

ואז לפי משפט שהוכחנו היום *ln* גם כן רציפה.

דוגמא: $\lim_{x\to 0} x^\alpha lnx = 0$ נגדיר *y=ln(x)*. $\lim_{x\to 0} x^\alpha lnx = \lim_{y\to -\infty} e^{\alpha y} y = \lim_{t\to +\infty} e^{-\alpha t}(-t) = -\lim_{t\to +\infty} \frac{t}{e^{\alpha t}} = 0$.

דוגמא: $\varepsilon > 0: \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$. נגדיר $\ln x = t$ מתקיים $\lim_{t\to +\infty} \frac{t}{e^{t\varepsilon}} = 0$.