תרגיל 4

1. תהי S קבוצה במרחב מטרי, ויהי $x \in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:
   (א) $x \in S \setminus S'$.
   (ב) קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B(x,\epsilon) \cap S = \{x\}$.
   (ג) לכל סדרה $\{x_n\} \subseteq S$ כך ש $x_n \to x$, מתקיים ש$\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

2. חשבו את הסגור של הקבוצות הבאות:
   (א) במרחב המטרי X של אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2...,n\}$, עם המטריקה הבאה $d: X \times X \to [0,\infty)$ ע"י:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{\min\{i : x_i \neq y_i\}} & x \neq y \end{cases}.$$

   מצאו את הסגור של הקבוצה A= אוסף הסדרות המתאפסות לבסוף.
   (ב) ב $(\mathbb{Z}, d_3)$ מצאו את הסגור של הקבוצה $A = 5\mathbb{Z}$.
   (ג) ב $C[0,1]$ עם מטריקת המקסימום, מצאו את הסגור של הקבוצה $A = \{f : f(\frac{1}{2}) < 5\}$.

3. הוכיחו/הפריכו:
   (א) $A_1' \cup ... \cup A_n' = (A_1 \cup ... \cup A_n)'$.
   (ב) $\bigcup A_i' = (\bigcup A_i)'$.

4. תהי A קבוצה חסום כליל במרחב מטרי כלשהו. הוכיחו שA חסומה.

5. תהי $A = \mathbb{R} \cup \{p\}$ עבור $p \notin \mathbb{R}$, עם הטופולוגיה הבאה: $\tau = P(\mathbb{R}) \cup \{B \subseteq A : |B^c| \leq \aleph_0\}$. הוכיחו שזוהי אכן טופולוגיה.

6. (א) תהי X קבוצה עם הטופולוגיה הקו־סופית. נניח שיש קבוצה $A \neq \emptyset, X$ שהיא סגוחה. הוכיחו כי X סופית.

   (ב) יהי (X,τ) מרחב טופולוגי אינסופי. נניח שהקבוצה הפתוחה האינסופית היחידה היא X. האם (X,τ) היא הטופולוגיה הטריויאלית? (למחשבה: האם יש דוגמא כזאת שבה יש אינסוף קבוצות פתוחות?)

7. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

(א) הטופולוגיה טריויאלית.

(ב) לכל סדרה x_n ו $x \in X$ מתקיים $x_n \to x$ (כל סדרה מתכנסת לכל מספר)

8. נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה

$$\tau = \{O_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$$

כאשר

$$O_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

(א) הוכיחו כי $(\mathbb{Z},\tau)$ אכן מרחב טופולוגי.

(ב) מצאו את $cl(O_n)$.

(ג) מצאו סדרה שמתכנסת לכל איבר $n \in \mathbb{Z}$.