פתרון תרגיל 8

1. הוכיחו כי אם $N<G$ אזי $Z(N)=\{x\in N \mid \forall y\in N, xy=yx\}$ היא תת חבורה נורמלית של G.

פתרון:

צריך להוכיח שלכל $g\in G$ ולכל $x\in Z(N)$ מתקיים $gxg^{-1}\in Z(N)$.

כדי להראות את זה הוכיח שכל $n\in N$ מתקיים $(gxg^{-1})n(gxg^{-1})^{-1}n^{-1}=e$.

$(gxg^{-1})n(gxg^{-1})^{-1}n^{-1}=gx(g^{-1}ng)x^{-1}g^{-1}n^{-1}=g(g^{-1}ng)xx^{-1}g^{-1}n^{-1}=nn^{-1}=e$.

שימו לב ש- $x(g^{-1}ng)=(g^{-1}ng)x$ כי x מחלף עם כל איבר של N ו- $g^{-1}ng\in N$ כי N היא תת חבורה נורמלית.

2. יהיו $H_1<G_1, H_2<G_2$. הוכיחו ש- $H_1\times H_2<G_1\times G_2$ /

פתרון:

יהיו $(g_1,g_2)\in G_1\times G_2$ ו- $(h_1,h_2)\in H_1\times H_2$.

צ"ל כי $(g_1,g_2)(h_1,h_2)(g_1,g_2)^{-1}\in H_1\times H_2$.

אכן,

$$(g_1,g_2)(h_1,h_2)(g_1,g_2)^{-1}=(g_1,g_2)(h_1,h_2)(g_1^{=1},g_2^{-1})=(g_1h_1g_1^{-1},g_2h_2g_2^{=1})\in H_1\times H_2$$

3. נתבונן בחבורה S_6 ובקבוצה הבאה: $H=\{\sigma\in S_6 : \sigma(2)=2,\sigma(4)=4,\sigma(6)=6\}$.

הוכיחו ש- H היא תת חבורה ושהיא איזומורפית ל- S_3. האם היא תת חבורה נורמלית?

הוכחה:

ההוכחה ש- H היא תת חבורה קל להוכיח לפי ההגדרה. H לא מזיזה את המספרים 2,4,6 ולכן ניתן להסתכל על התמורות שלה כעל על תמורות של המספרים $\{1,3,5\}$, לכן $H\equiv S_3$. H אינה תת חבורה נורמלית שכן התמורה $(135)\in H$ אך התמורה הצמודה לה $(124)\notin H$.

4. תהי G חבורה (לא בהכרח סופית) ותהיינה $A,B<G$. הוכיחו או הפריכו:

א. $G/A\cong G/B$ אם ורק אם $A=B$.

פתרון:

ניקח $G=Z_2\times Z_2$, $A=\{0\}\times\{0,1\}$, $B=\{0,1\}\times\{0\}$ ומתקיים הנדרש.

ב. $G/A \cong G/B$ אם ורק אם $A \cong B$.

פתרון:

$G = Z_4 \times Z_2$, $A = \{(00),(2,0)\}$, $B = \{(0,0),(0,1)\}$.

ג. אם $G \cong G/A$ אזי A היא תת החבורה הטריוויאלית.

פתרון:

ניקח $G = C^*$, $f : C^* \to C^*$ המקיימת $f(x) = x^2$. אזי עבור $A = \ker(f) = \{1,-1\}$ מתקיים $G \cong G/A$, בעוד ש- A אינה טריואלית.

5. תהיינה $A, B, C < G$ כך ש- $B \subseteq A$. הוכיחו ש- AC/BC היא חבורת מנה של A/B. (רמז: היעזרו במשפט האיזומורפיזם)

פתרון:

ראשית שימו לב שמנתוני השאלה $B < A$ שכן $B < G$ וגם $B \le A$.

כמו כן, מהתנאי $A, B, C < G$ נקבל $AC, BC < G$, וכך ש- $B \le A$ נסיק ש- $BC \le AC$ ולכן $BC < AC$. מכאן ש- A/B ו- AC/BC אכן חבורות.

נמצא אפימורפיזם $f : A/B \to AC/BC$ ואז ממשפט האיזומורפיזם נקבל ש- $\dfrac{A/B}{\ker f} \cong AC/BC$ ומכאן ש- AC/BC היא חבורת מנה של A/B.

תהי $f : A/B \to AC/BC$ מוגדרת ע"י $f(aB) = a\,B$. שימו לב ש- ($A \subseteq AC$ כי $e_G \in C$) ולכן אם $a \in A$ אז גם $a \in AC$. נוכיח שהפונקציה מוגדרת היטב. נניח ש- $a_1 B = a_2 B$ אזי $a_1(BC) = (a_1 B)C = (a_2 B)C = a_2 BC$.

$f(a_1 B a_2 B) = f(a_1 a_2 B) = a_1 a_2 BC = a_1 BC a_2 BC = f(a_1 B) f(a_2 B)$

לכן f הומומורפיזם. נותר להראות שהיא על. זה נובע מכך שלכל $c \in C$ ו- $a \in A$
$f(aB) = aBC = aCB = a(cC)B = acCB = acBC$.

6. א. נגדיר $f : C^* \to C^*$ ע"י $f(x) = x^2$.

הומומורפיזם: $f(xy) = (xy)^2 = x^2 y^2 = f(x) f(y)$.

על: ידוע כי כל איבר במרוכבים יש שורש.

נחשב את הגרעין:

$$\ker f = \{x \in C^* \mid x^2 = 1\} = \{1,-1\}.$$

ב. $f : C^* \to R^+$ ע"י $f(x) = |x|$.

הומומורפיזם: ידוע שערך מוחלט הוא כפלי.

על: מקור אפשרי של r הוא r בעצמו.

נחשב את הגרעין, $\ker f = \{x \in C^* \mid |x| = 1\} = T$.