תרגול 3 אינפי 3

14 בינואר 2015

הגדרה:

נאמר שקבוצה A במרחב מטרי X היא חסומה, אם היא לכל נקודה x_0 בקבוצה קיים $r > 0$ כך ש: $B(x_0, r) \supseteq A$.

תנאי שקול הוא שקיימת נקודה x_0 וקיים $r > 0$ כך ש:

$$B(x_0, r) \supseteq A$$

<u>תרגיל:</u>

האם הקבוצות הבאות פתוחות? סגורות? חסומות?

1. $A = \{(x,y)|y = 0, x \in (0,1)\}$ ב־$\mathbb{R}^2$.

הקבוצה אינה פתוחה, מכיוון שעבור $(\frac{1}{2}, 0) \in A$, לכל $r > 0$ מתקיים $B((\frac{1}{2}, 0), r) \nsubseteq A$.

הקבוצה אינה סגורה, כי $\left\{(\frac{1}{n}, 0)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ אך $lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}, 0) = (0,0) \notin A$.

הקבוצה חסומה; הכדור $B((\frac{1}{2}, 0), 2)$ מכיל אותה.

2. $B = \{(x,y)|x = y\}$ ב־$\mathbb{R}^2$.

הקבוצה אינה פתוחה, כי עבור $(1,1) \in B$, לכל $r > 0$ מתקיים $B((1,1), r) \subsetneq B$.

הקבוצה סגורה, מכיוון שהמשלים פתוחה; לכל נקודה $(x,y) \in B^c$ נסמן את מרחקה מהישר $y = x$ ב־D ואז $B((x,y), \frac{D}{2}) \subseteq B^c$.

הקבוצה אינה חסומה - לכל $r > 0$, הנקודה $(3r, 3r)$ נמצאת בקבוצה אך לא נמצאת בכדור $B((0,0), r)$.

3. $C=\{(x,y)|x>0,y<0,x+y>-1\}$ ב$-\mathbb{R}^2$.

הקבוצה פתוחה; לכל $(x,y)\in C$ נסמן את מרחקה מהישר $x+y+1=0$ ב$-D$, ונסמן: $r=\frac{1}{2}min\{|x|,|y|,D\}$ ונקבל ש: $B((x,y),r)\subseteq C$.

הקבוצה לא סגורה, כי המשלים אינה פתוחה; עבור $(0,0)\in C^c$, לכל $r>0$ $B((0,0),r)\subsetneq C^c$ ולכן אינה פתוחה.

הקבוצה אינה חסומה, כי לכל $r>0$, הנקודה $(1+10r,-1-10r)$ נמצאת בקבוצה אך לא נמצאת בכדור $B((1,-1),r)$.

<u>תרגיל:</u>

האם הקבוצות הבאות פתוחות ב$-\mathbb{R}^2$? סגורות? מצאו את נקודות הגבול.

1. $A=\{(0,1),(0,0)\}$.

הקבוצה לא פתוחה; לכל $r>0$, $B((0,0),r)\subsetneq A$.

הקבוצה סגורה; כל נקודון הוא סגור ואיחוד סופי של סגורות הוא סגור.

האופציות היחידות לנקודות גבול הן $(0,1)$, $(0,0)$ כי A סגורה, אך $B((0,0),\frac{1}{2}),B((0,1),\frac{1}{2})$ זרים ל$-A$ (למעט מרכזיהם) ולכן אלו לא נקודות גבול.

לכן לקבוצה אין נקודות גבול.

2. $B=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}\cup\{(0,1)\}$.

הקבוצה לא פתוחה; לכל $r>0$, $B((0,1),r)\nsubseteq B$.

הקבוצה לא סגורה, מכיוון שמשלימתה אינה פתוחה; $(1,0)\in B^c$ אך לכל $r>0$, $B((1,0),r)\nsubseteq B^c$.

הקבוצה $\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$היא כדור פתוח, לכן פתוחה ולכן כל הנקודות בה הן נקודות גבול.

גם נקודות הקבוצה $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$הן נקודות גבול, כי לכל $(x,y)\in\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ לכל $r>0$ אפשר לקחת $r'=min\{1,r\}$ ואז:

$$((1-\frac{r'}{2})x,(1-\frac{r'}{2})y)\in B\cap B((x,y),r)$$

כל נקודה (x,y) אחרת אינה נקודת גבול (נסמן את מרחקה מהמעגל $\{(x,y)|x^2+y^2=$

$1\}$ ב-D ואז הכדור $B((x,y),\frac{D}{2})$ זר ל-B, ולכן קבוצת נקודות הגבול היא

$$\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$$

3. $C=\{(x,y)|x>0,y<0\}$.

הקבוצה פתוחה; לכל $(x,y)\in C$ נסמן: $r=\frac{1}{2}min\{|x|,|y|\}$ ואז $B((x,y),r)\subseteq C$, כי אם $(a,b)\in B((x,y),r)$ אז:

$$|a-x|<\sqrt{|x-a|^2+|y-b|^2}<r\leq\frac{1}{2}|x|$$

ולכן:

$$a>|x|-\frac{1}{2}|x|>0$$

באופן דומה, $|b-y|<\frac{1}{2}|y|$ ולכן:

$$b<y+\frac{1}{2}|y|=-|y|+\frac{1}{2}|y|<0$$

וסה"כ: $(a,b)\in C$.

הקבוצה לא סגורה, כי משלימתה אינה פתוחה; $(0,0)\in C^c$ אך לכל $r>0$, $B((0,0),r)\nsubseteq C$.

הקבוצה פתוחה, ולכן כל $(x,y)\in C$ היא נקודת גבול.

יתר על כן, גם הנקודות: $\{(x,y)|y=0,x\geq 0\}\cup\{(x,y)|x=0,y\leq 0\}$ הן נקודות גבול, כי לכל (x,y) כזו ולכל $r>0$,

$$(x+\frac{r}{2},y-\frac{r}{2})\in B((x,y),r)\cap C$$

נקודות אחרות אינן נקודות גבול (קל לראות) ולכן בסה"כ נקודות הגבול הן $\{(x,y)|x\geq 0,y\geq 0\}$.

הגדרה:

יהי X מרחב מטרי ותהי A קבוצה. נאמר שאוסף של תת קבוצות $\{X_i\}_{i\in I}$הוא כיסוי פתוח של A, אם כל X_i היא פתוחה ומתקיים:

$$\bigcup_{i\in I} X_i \supseteq A$$

קבוצה שלכל כיסוי פתוח שלה קיים תת־כיסוי סופי נקראת קבוצה קומפקטית.

משפט היינה בורל: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא קומפקטית אם ורק אם היא סגורה וחסומה.

באופן כללי, במרחב מטרי קבוצה קומפקטית היא סגורה וחסומה; משפט היינה בורל נותן לנו גם את הכיוון השני במרחבים $\mathbb{R}^n$.

<u>תרגיל:</u>

תהיינה $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$קבוצות קומפטיות במרחב $\mathbb{R}^m$. האם הקבוצות הבאות קומפקטיות?

1. $A \cup B$.

כן. איחוד סופי של סגורות הוא סגור ואיחוד סופי של חסומות הוא חסום (כי אם $A \supseteq B(0,r_2), B \supseteq B(0,r_1)$ אז $A \cup B \subseteq B(0,r_1+r_2)$) ולכן לפי היינה בורל הקבוצה קומפקטית.

2. $A \backslash B$.

לא בהכרח. נתבונן למשל בקבוצות $A=[2,4], B=[2,3]$. $A \backslash B = (3,4]$ לא סגורה ולכן לא קומפקטית.

3. $A \cap B$.

כן. חיתוך של סגורות הוא סגור וחיתוך של חסומות הוא חסום; לכן הקבוצה סגורה וחסומה, ולפי היינה בורל היא קומפקטית.

4. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

לא בהכרח. נבחר: $A_n = \{n\}$ ואז $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$ ולא חסומה ולכן לא קומפקטית.

5. $A+B=\{a+b | a\in A, b\in B\}$.

כן. A, B חסומות, לכן קיימים r_1, r_2 עבורם $A \subseteq B(0,r_1), B \subseteq B(0,r_2)$ ואז עבור $r=r_1+r_2$ לכל $x \in A+B$ מתקיים:

$$||x|| = ||a+b|| \leq ||a|| + ||b|| < r_1 + r_2 = r$$

ולכן $A+B$ חסומה. $A+B$ סגורה (בדקו!) ולכן לפי היינה בורל גם קומפקטית.

<u>תרגיל:</u>

תהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה חסומה ב$-\mathbb{R}^n$. נניח שהסדרה $\{d_2(x_n,0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (המטריקה האוקלידית) עולה ממש. האם $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת?

<u>פתרון:</u>

לא בהכרח! נתבונן בסדרה $x_n=(-1)^n(1-\frac{1}{n})$ ב$-\mathbb{R}$. $|x_n|<1$ ולכן חסומה.

$$d_2(x_n,0)=|x_n|=1-\frac{1}{n}$$

עולה ממש, אך הסדרה לא מתכנסת.

*בתרגול חישבנו כמה גבולות של סדרות ב$-\mathbb{R}^2$, אבל הם היו ממש קלילים אז לא טרחתי לכתוב אותם.